

УДК 624.072

## НЕЛИНЕЙНЫЙ СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОРТОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С. В. БОСАКОВ<sup>1,2</sup>, О. В. КОЗУНОВА<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

<sup>1</sup>Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет транспорта

Гомель, Беларусь

*Напряженно-деформированное состояние ортотропных пластин в приближенной теории изгиба.* Статический расчет плитных конструкций на упругом основании с механической точки зрения есть решение контактной задачи соприкасающихся тел [1] через решение интегральных уравнений, зависящих от их ядра и формы контактирующих тел [2]. Ядро интегральных уравнений называют функцией Грина [1–3], которая представляет собой функцию перемещений точек поверхности упругого основания от действия единичной силы [3].

В инженерной практике нецелесообразно решать каждую контактную задачу через интегральные уравнения в связи с трудоемкими математическими вычислениями. Поэтому на практике успешно используют метод Б. Н. Жемочкина [4], который сводит контактную задачу к задаче строительной механики.

Вопросы расчета фундаментных и дорожных плит на упругом основании с учетом анизотропии (в частности, ортотропии) плит и их трещинообразования в силу неопределенности исходных данных упругих тел (железобетона и грунтов) до настоящего времени не исследованы в полной мере.

Приближенная теория изгиба анизотропных гибких пластинок (рис. 1) достаточно полно и основательно освещена в [5].

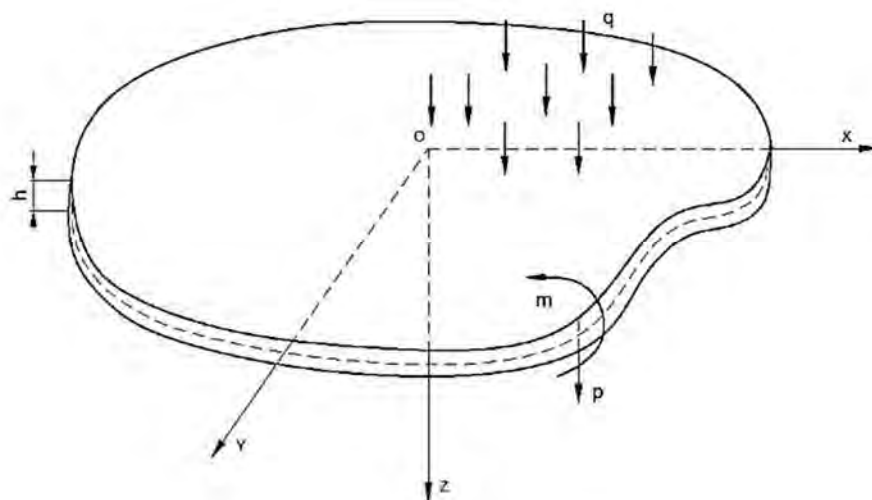


Рис. 1. Общий вид гибкой пластинки под нагрузкой

Цилиндрические жесткости изгиба пластинки определяются для главных направлений упругости и имеют название главных жесткостей:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}. \quad (1)$$

Выражение для потенциальной энергии изгиба ортотропной пластинки [5], при пренебрежении компонентами тензора напряжений  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{xz}$ ,

$$V = \frac{1}{2} \iint \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (2)$$

*Постановка задачи. Граничные условия.* Рассматривается прямоугольная ортотропная плита под действием внешней нагрузки толщиной  $h$ , опирающаяся на упругое основание, с цилиндрическими жесткостями в соответствующих плоскостях  $D_x$ ,  $D_y$ . Крутильная жесткость изолированной ортотропной плиты вычисляется по формуле [6]

$$D_k = \frac{\nu_x + \nu_y}{2} \sqrt{D_x \cdot D_y}, \quad (3)$$

где цилиндрические жесткости при изгибе  $D_x$ ,  $D_y$  определяются формулами (1).

В ходе упругого и нелинейного расчетов требуется определить осадки плиты, распределение контактных напряжений под ней, внутренние усилия в плите (изгибающие моменты), а также выполнить анализ полученных результатов.

Упругое основание в данных исследованиях моделируется в виде упругого однородного изотропного слоя, шарнирно соединенного с недеформируемым основанием (несжимаемым слоем). Принимается, что в контактной зоне отсутствуют касательные напряжения и для плиты справедливы гипотезы технической теории изгиба [1].

Расчет прямоугольной ортотропной плиты выполняется методом Б. Н. Жемочкина [4]. Плита разбивается на одинаковые прямоугольные участки размерами  $\Delta x \times \Delta y$  и в центре каждого участка размещается вертикальная связь для моделирования контакта плиты с упругим основанием. Полученная статически неопределимая система решается смешанным методом строительной механики [7], приняв за неизвестные силы в связях Жемочкина, а также два угловых и линейное перемещения введенного защемления нормали в центре плиты.

*Алгоритм нелинейного расчета ортотропной плиты с трещиной методом Б. Н. Жемочкина.* Сформулированную задачу в нелинейной постановке предлагается решать итерационным путем метода Б. Н. Жемочкина через зависимость

«жесткость – кривизна» [8]. На первой итерации плита рассчитывается как линейно-упругая, однородная и ортотропная, на последующих – как линейно-упругая, ортотропная неоднородная на каждом участке Жемочкина.

Для упругого однородного изотропного слоя, шарнирно соединенного с недеформируемым основанием (несжимаемым слоем), вертикальные перемещения поверхности упругого слоя от сосредоточенной силы  $P$  определяются через соотношение (2.13) из монографии С. В. Босакова [3].

В [3] также получено соотношение (3.3) для перемещения точки  $M(x_i, y_i)$  поверхности упругого полупространства при загрузении участка прямоугольной формы на этой поверхности равномерно распределенной нагрузкой с равнодействующей, равной 1.

Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы (рис. 2) определяются методом Ритца [9] при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом оригинальном выражении, которое предлагается впервые в проводимых ранее исследованиях.

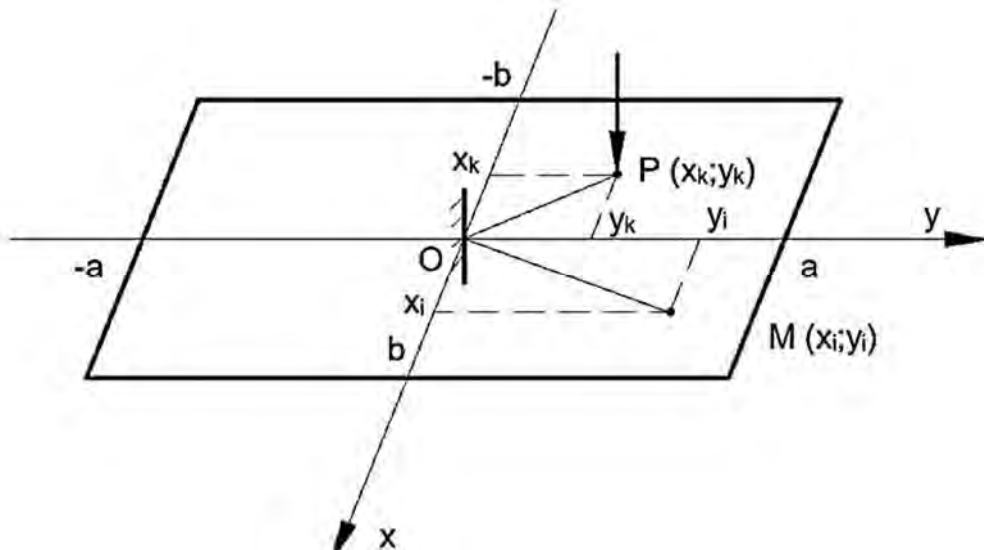


Рис. 2. Прямоугольная ортотропная плита с защемленной нормалью

Общий вид нового решения имеет следующее представление:

$$W_{(i)}^{(n)}(x_i, y_i) = \left( \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} \right) \left( \begin{array}{l} A_{0,0}^{(n)} + A_{1,0}^{(n)} \frac{x_i}{a} + A_{0,1}^{(n)} \frac{y_i}{b} + A_{2,0}^{(n)} \frac{x_i^2}{a^2} + \\ + A_{1,1}^{(n)} \frac{x_i y_i}{ab} - \frac{b^2(a^2 + 3b^2)A_{2,0}^{(n)}}{a^2(3a^2 + b^2)} \frac{y_i^2}{b^2} \end{array} \right), \quad (4)$$

где  $x_i, y_i$  – координаты точки  $i$ , в которой определяются прогибы плиты  $W_{(i)}^{(n)}(x_i, y_i)$  с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода;  $A_{m,k}^{(n)}$  – постоянные коэффициенты метода Ритца [9] при координатных функциях,

базисной из которых является функция  $f_{m,k}(x_i, y_i) = \frac{x_i^m y_i^k}{a^m b^k}$ , где чередующиеся индексы  $m, k = 0, 1, 2$ .

Выражение (4) удовлетворяет не только граничным условиям заземленной плиты по перемещениям, но и бигармоническому уравнению [1].

Далее определяется функционал полной энергии ортотропной пластинки с заземленной нормалью и действующей на нее сосредоточенной единичной силы как квадратичная функция коэффициентов  $A_{i,k}$ , что позволяет из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) найти эти коэффициенты и, таким образом, вычислить прогибы плиты с заземленной нормалью. Так формируется система уравнений способа Жемочкина на каждой итерации.

*Учет физической нелинейности.* Технические нормативные правовые акты в статических расчетах железобетонных гибких плит с возможным трещинообразованием при нахождении переменных жесткостей рекомендуют использовать приведенный модуль упругости. В [10, 11] приводится подробный алгоритм такого расчета.

Предлагается нелинейный расчет основывать на зависимости «жесткость – кривизна» по В. И. Соломину [12], которая связана с диаграммой «момент – кривизна» через переменную (секущую) жесткость:

$$\operatorname{tg}\beta_i = B_i = \frac{M_k}{\chi_k}, \quad (5)$$

где  $B_i$  – переменная (секущая) жесткость при изгибе плиты в  $i$ -м состоянии, которая является тангенсом угла наклона секущей к оси кривизны, проведенной к точке  $K$  диаграммы «момент – кривизна».

На рис. 3 построена зависимость «жесткость – кривизна» [13]. При ее построении использовалась приведенная цилиндрическая жесткость плиты по направлению осей ортотропии.

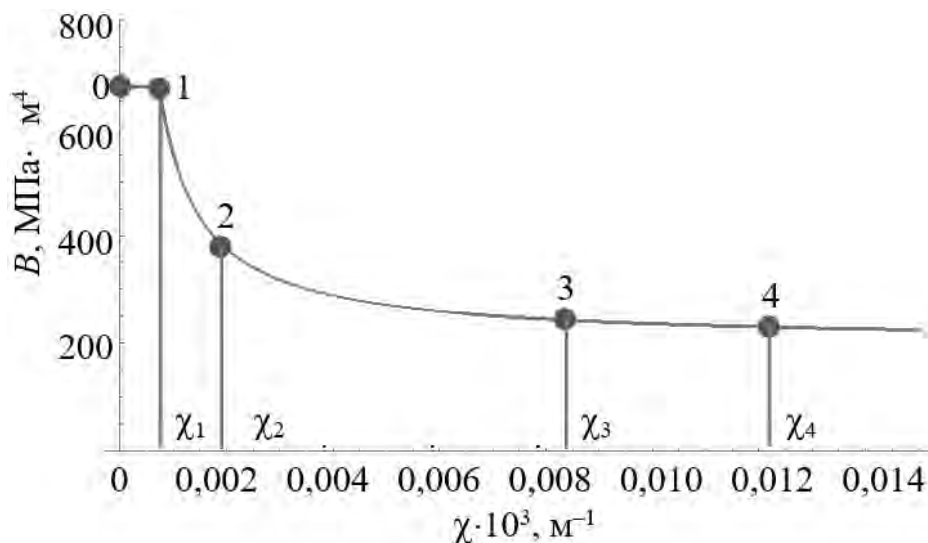


Рис. 3. Зависимость «жесткость – кривизна» [13]

*Результаты упругого и нелинейного расчетов.* Расчеты выполнялись для ортотропной железобетонной плиты прямоугольного очертания (размеры  $4 \times 3 \times 0,14$  м). Материал конструкции – тяжелый бетон класса С20/25. Принятые в задаче упругие характеристики: модуль деформации бетона  $E_b = 29,05$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu_b = 0,17$ . Толщина слоя, на котором расположена плита,  $H = 7$  м. Упругие параметры слоя: модуль упругости  $E_0 = 20$  кПа; коэффициент Пуассона  $\nu_0 = 0,33$ . На плиту действует внешняя статическая нагрузка от колеса  $Q = 65$  кН. Нагрузка приложена в центре плиты и принимается распределенной на участке размером  $0,4 \times 0,4$  м. В расчетах был учтен собственный вес плиты  $q = 3,5$  кН/м<sup>2</sup>.

В [13] приведены результаты упругого расчета: осадка основания  $w_{\max} = 0,0012558$  м; контактное напряжение в зоне взаимодействия плиты с упругим слоем  $p_{\max} = 10,38$  кПа; а также результаты нелинейного расчета (3-я итерация): осадка основания  $w_{\max} = 0,0012582$  м; контактное напряжение в зоне взаимодействия плиты с упругим основанием  $p_{\max} = 10,43$  кПа.

*Сопоставление результатов упругого и нелинейного решения (3-я итерация).* Анализ проводился на основании величин осадок ортотропной плиты и контактных напряжений в контактной зоне плиты и упругого основания (рис. 4).

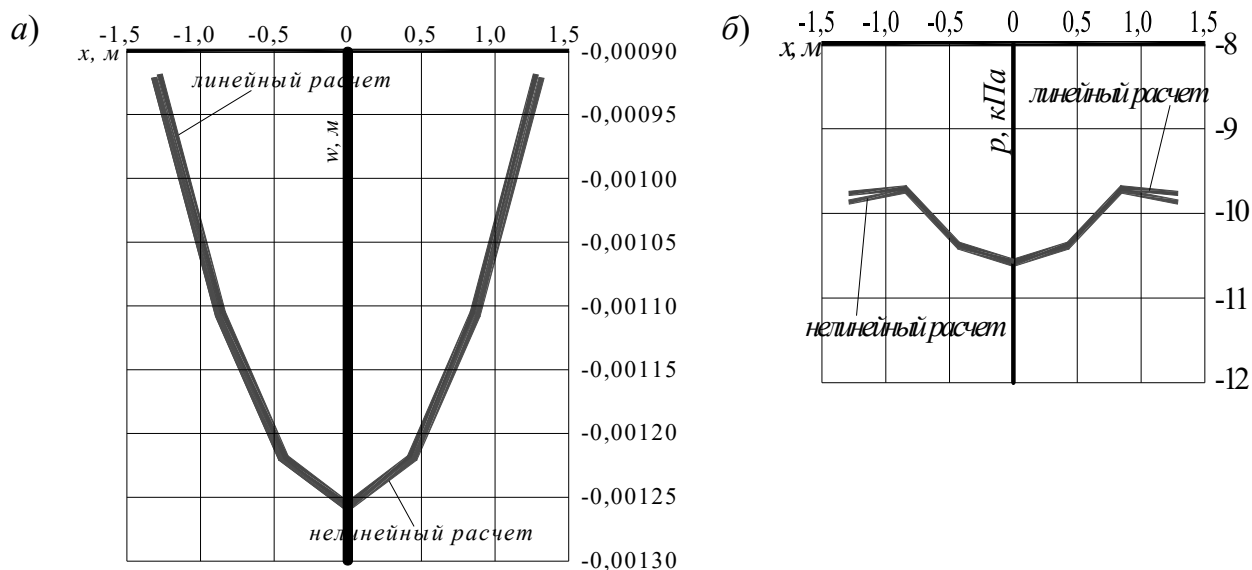


Рис. 4. Осадки железобетонной плиты: синяя линия – упругое решение; красная линия – нелинейный расчет (3-я итерация) (а); контактные напряжения: синяя линия – упругое решение; красная цвет – нелинейный расчет (3-я итерация) (б)

На первом графике можно наблюдать практически полное совпадение значений осадок, полученных в результате упругого и нелинейного решения, при малом их увеличении. Второй график отражает графическое сравнение величин контактных напряжений упругого и нелинейного расчетов в зоне контактного взаимодействия. Вблизи центра плиты результаты решений практически полностью совпадают, по направлению к краям плиты наблюдается незначительное расхождение в значениях напряжений (при учете переменной кривизны и

жесткости) – до 3 %.

*Выводы и заключения.* Предложена в развитии методика и последовательность нелинейного итерационного расчета методом Б. Н. Жемочкина железобетонной ортотропной плиты на упругом основании, моделируемом упругим слоем конечной толщины. Прогибы плиты с защемленной нормалью в основной системе смешанного метода от действия сосредоточенной силы определяются методом Ритца при представлении прогибов в виде степенного полинома в новом оригинальном выражении, которое впервые предлагается в проводимых исследованиях. Кроме того, в нелинейных расчетах используется зависимость «жесткость – кривизна», что сокращает объем вычислений.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров, А. В.** Основы теории упругости и пластичности / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – Москва: Высшая школа, 2002. – 400 с.
2. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / Под общ. ред. А. Б. Васильева [и др.]. – Москва: Физматлит, 2003. – 432 с.
3. **Босаков, С. В.** Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.
4. **Жемочкин, Б. Н.** Практические методы расчетов фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Госстройиздат, 1962. – 240 с.
5. **Лехницкий, С. Г.** Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – Москва: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1957. – 387 с.
6. **Тимошенко, С. П.** Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва: Физматгиз, 1963. – 536 с.
7. **Ржаницын, Р. А.** Строительная механика / Р. А. Ржаницын. – Москва: Высшая школа, 1991. – 439 с.
8. **Градштейн, И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Москва: Физматгиз, 1963. – 1098 с.
9. **Босаков, С. В.** Метод Ритца в контактных задачах теории упругости / С. В. Босаков. – Брест: БрГТУ, 2006. – 107 с.
10. **Козунова, О. В.** Нелинейный расчет железобетонной балки на упругом основании с помощью зависимости «жесткость – кривизна» / О. В. Козунова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2022. – № 1. – С. 37–46.
11. **Козунова, О. В.** Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании: в 2 ч. Ч. 1: Теория расчета / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. – № 21 (3). – С. 211–221.
12. **Соломин, В. И.** Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В. И. Соломин, С. Б. Шматков. – Москва: Стройиздат, 1986. – 208 с.
13. **Козунова, О. В.** Совершенствование методики расчета гибких ортотропных плит на упругом основании: в 2 ч. Ч. 2: Результаты расчета / О. В. Козунова // Наука и техника. – 2022. – № 21 (4). – С. 290–296.