УДК 517.927.6

МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

А. Н. БОНДАРЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается уравнение Ляпунова вида

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A_1(t) X A_2(t) + \lambda B_1(t) X B_2(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

где $A_1, B_1 \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $A_2, B_2 \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{m\times m})$, $F \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times m})$, $I = [0, \omega]$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Исследуется краевая задача для (1) с условием [1, 2]

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i, \lambda) = 0, \tag{2}$$

где M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega$, $\omega > 0$.

Уравнение (1) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида [1, 3 и др.]. Задачи типа (1), (2) играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1–3]. В данной работе с помощью метода [4] в невырожденном случае изучаются следующие вопросы: разрешимость, построение решения и оценка его области локализации.

Задача (1), (2) исследуется в $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times m})$ с нормой $\|X\|_C = \max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – фиксированная матричная норма, например, любая из норм, приведённых в [5, с. 21]. Данная работа является развитием и обобщением [6].

Обозначения:

$$M = \sum_{i=1}^{k} M_i, \quad \gamma = \|M^{-1}\|, \quad m = \sum_{i=1}^{k}\|M_i\|, \quad \alpha = \int_0^{\omega}\|A_1(\tau)\|\|A_2(\tau)\|d\tau,$$

$$\beta = \int_0^{\omega}\|B_1(\tau)\|\|B_2(\tau)\|d\tau, \quad h = \int_0^{\omega}\|F(\tau)\|d\tau, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad q = \gamma m(\alpha + \beta).$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* $\det M \neq 0$, $\varepsilon q < 1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима*; *ее решение* $X(t, \lambda)$ *представимо в виде ряда*

$$X(t,\lambda) = X_0(t) + \lambda X_1(t) + \lambda^2 X_2(t) + \ldots + \lambda^p X_p(t) + \ldots, \tag{3}$$

при этом справедлива оценка

$$\|X(t,\lambda)\| \leq \frac{\gamma m h}{1 - \varepsilon q}. \tag{4}$$

Для доказательства теоремы сначала получено матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t,\lambda)=\lambda M^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}\left[A_1(\tau)X(\tau,\lambda)A_2(\tau)+B_1(\tau)X(\tau,\lambda)B_2(\tau)\right]d\tau+G(t), \qquad (5)$$

где

$$G(t)=M^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}F(\tau)d\tau.$$

Однозначная разрешимость уравнения (5) установлена с помощью принципа сжимающих отображений Каччопполи – Банаха [7, с. 609]).

Для построения решения уравнения (5) используется метод разложения в ряд по степеням параметра λ. Формальное решение $X(t,\lambda)$ строится в виде (3), где

$$X_0(t)=G(t),$$

$$X_s(t)=M^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}\left[A_1(\tau)X_{s-1}(\tau)A_2(\tau)+B_1(\tau)X_{s-1}(\tau)B_2(\tau)\right]d\tau, \quad s=1,2,\ \ldots .$$

Далее для матриц $X_s(t)$ получена рекуррентная оценка

$$\left\|X_s\right\|_C\le q\left\|X_{s-1}\right\|_C, \quad s=1,2,\ldots,$$

на основе которой выведена явная оценка

$$\left\|X_s\right\|_C\le q^s\left\|X_0\right\|_C, \quad s=1,2,\ldots .$$

Таким образом, матричный ряд (3) мажорируется функциональным рядом

$$\left\|X_0(t)\right\|+\varepsilon\left\|X_1(t)\right\|+\varepsilon^2\left\|X_2(t)\right\|+\ldots+\varepsilon^p\left\|X_p(t)\right\|+\ldots,$$

сходящимся равномерно по $t\in I$. Так как этот ряд сходится равномерно, то, согласно [7], его сумма представляет собой решение интегрального уравнения (5), при этом имеет место оценка (4).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.

2. **Ешуков, Л. Н.** Об одной функциональной задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Н. Ешуков // Успехи мат. наук. – 1958. – Т. 13, вып. 3 (81). – С. 191–196.

3. **Параев, Ю. И.** Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю. И. Параев. – Томск: ТГУ, 1989. – 166 с.

4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

5. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1967. – 472 с.

6. **Бондарев, А. Н.** Левосторонняя регуляризация многоточечной краевой задачи для обобщенного матричного уравнения Ляпунова / А. Н. Бондарев // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 21–22 апр. 2022 г. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 393–394.

7. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1984. – 752 с.