УДК 517.925

МАТРИЧНЫЙ АНАЛОГ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

А. И. КАШПАР
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Изучается обобщение краевой задачи типа [1–5]

$$\ddot{\mathbf{X}} = \lambda\left(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{P}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{Q}_1(t) + \mathbf{X}\mathbf{B}_1(t) + \mathbf{A}_2(t)\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{P}_2(t)\dot{\mathbf{X}}\mathbf{Q}_2(t) + \dot{\mathbf{X}}\mathbf{B}_2(t) + \mathbf{F}(t)\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0,\lambda) = \mathbf{M},\ \ \mathbf{X}(\omega,\lambda) = \mathbf{N},\ \ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{2}$$

где $\mathbf{F}(t), \mathbf{A}_i(t), \mathbf{B}_i(t), \mathbf{P}_i(t), \mathbf{Q}_i(t)$ $(i = 1, 2)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей, $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы, $\omega > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$; $\dot{\mathbf{X}} = d\mathbf{X}/dt$.

В данной работе, представляющей собой продолжение и развитие [1–5], с помощью метода [6, гл. 2] получено коэффициентное достаточное условие существования и единственности решения задачи (1), (2), а также дана оценка области локализации ее решения и его производной. Наряду с этим разработан алгоритм построения решения этой задачи.

Обозначения: $\alpha_i = \max\limits_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{A}_i(t)\|$, $\beta_i = \max\limits_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{B}_i(t)\|$, $p_i = \max\limits_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{P}_i(t)\|$, $q_i = \max\limits_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{Q}_i(t)\|$, $h = \max\limits_{0\le t\le\omega}\|\mathbf{F}(t)\|$, $\varepsilon = |\lambda|$, $q = \frac{\omega}{2}\left[(\alpha_1 + p_1q_1 + \beta_1)\omega + \alpha_2 + p_2q_2 + \beta_2\right]$, $K = \frac{1}{\omega}\|\mathbf{M} - \mathbf{N}\| + \frac{\omega h}{2} + \frac{\varepsilon\omega}{2}(\alpha_1 + p_1q_1 + \beta_1)\|\mathbf{M}\|$.

Теорема. При выполнении условия $\varepsilon q < 1$ задача (1), (2) однозначно разрешима, при этом справедливы оценки

$$\|\mathbf{X}(t,\lambda)\| \le \|\mathbf{M}\| + \frac{K\omega}{1-\varepsilon q},\quad \|\dot{\mathbf{X}}(t,\lambda)\| \le \frac{K\omega}{1-\varepsilon q}.$$

С помощью метода малого параметра Ляпунова – Пуанкаре получен алгоритм построения решения этой задачи на основе эквивалентной интегральной системы:

$$\mathbf{X}(t,\lambda) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{Y}(\tau,\lambda)d\tau, \tag{3}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda) = \frac{1}{\omega}(\mathbf{N} - \mathbf{M}) + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega\left(\int_\tau^t \mathbf{H}(s,\lambda)ds\right)d\tau, \tag{4}$$

где $\mathbf{H}(t,\lambda)=\lambda\left(\mathbf{A}_1(t)\mathbf{X}+\mathbf{P}_1(t)\mathbf{X}\mathbf{Q}_1(t)+\mathbf{X}\mathbf{B}_1(t)+\mathbf{A}_2(t)\mathbf{Y}+\mathbf{P}_2(t)\mathbf{Y}\mathbf{Q}_2(t)+\mathbf{Y}\mathbf{B}_2(t)+\mathbf{F}(t)\right)\equiv$ $\equiv\lambda\mathbf{H}_1(t)+\lambda^2\mathbf{H}_2(t)+\ldots+\lambda^k\mathbf{H}_k(t)+\ldots.$

Решение задачи (3), (4) получено в виде

$$\mathbf{X}(t,\lambda)=\mathbf{X}_0(t)+\lambda\mathbf{X}_1(t)+\ldots+\lambda^k\mathbf{X}_k(t)+\ldots, \tag{5}$$

$$\mathbf{Y}(t,\lambda)=\mathbf{Y}_0(t)+\lambda\mathbf{Y}_1(t)+\ldots+\lambda^k\mathbf{Y}_k(t)+\ldots\ , \tag{6}$$

где $\mathbf{X}_0(t)=\mathbf{M}+\frac{t}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}),\qquad \mathbf{Y}_0(t)=\frac{1}{\omega}(\mathbf{N}-\mathbf{M}),\qquad \mathbf{X}_m(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^t\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi\mathbf{H}_m(s)ds\right)d\tau\right)d\varphi,$

$\mathbf{Y}_m(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\left(\int_\tau^t\mathbf{H}_m(s)ds\right)d\tau,\ m=1,2,3,\ldots$

Установлено, что ряды (5), (6) сходятся равномерно по $t\in[0,\omega]$ к решению интегральной системы в области значений параметра $|\lambda|<1/q$.

Приведенные результаты по аналогии с [7] могут быть использованы при решении соответствующих задачах теплофизики.

Замечание. В [3, 5] в матричном дифференциальном уравнении следует принять $A(t)=B(t)=0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кашпар, А. И.** О построении решения краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2018. – № 2. – С. 45–54.

2. **Кашпар, А. И.** О разрешимости и построении решения задачи Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 50–61.

3. **Кашпар, А. И.** Задача Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 23–24 апр. 2020 г. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 488–490.

4. **Кашпар, А. И.** О краевой задаче Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2021. – № 2. – С. 16–27.

5. **Кашпар, А. И.** К задаче Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 21–22 апр. 2022 г. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 399–400.

6. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

7. **Кашпар, А. И.** К аналитическим методам расчета стационарного температурного поля в круговой цилиндрической оболочке / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 4. – С. 435–446.