УДК 517.5

К ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Предлагается алгоритм типа [1] построения $x \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^n\right)$ из системы соотношений

$$\int_{a_i}^{b_i} \Psi_i(\tau) x(\tau) d\tau = \mu_i , \tag{1}$$

где $\Psi_i \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i, b_i \in I = [0, \omega]$, $i = \overline{1,k}$, $\omega > 0$.

Система (1) представляет собой обобщение [1], а при $k = \infty$ – задач типа [2, с. 264], [3, гл. IX, § 5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, возможно, базисного типа [4, гл. 4], в частности, $\Phi_i(t) = \Psi_i(t)$.

На основе методики [5, 6] при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение

$$x(t) = G_t(y) + g(t), \tag{2}$$

где y – вспомогательная функция, аналогичная [1, 4, гл. 4], последовательно доопределяемая в рамках соответствующего алгоритма с сохранением произвола, $y = y(t)$; $G_t(y), g(t)$ – соответственно линейный однородный оператор и функция, конструируемые по алгоритму

$$G_{j+1}\left(y_{j+1}\right) = G_j\left(y_{j+1}\right) - G_j\left(\Phi_{j+1}\right)\left(\widetilde{\Psi_{j+1} G_j\left(\Phi_{j+1}\right)}\right)^{-1} \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \Psi_{j+1} G_{j+1}\left(y_{j+1}\right) d\tau , \tag{3}$$

$$g_{j+1} = g_j + G_j\left(\Phi_{j+1}\right)\left(\widetilde{\Psi_{j+1} G_j\left(\Phi_{j+1}\right)}\right)^{-1} \left[\mu_{j+1} - \int_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \Psi_{j+1} g_j d\tau\right], \tag{4}$$

$j = \overline{0, k-1}$, тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку $\left[a_j, b_j\right]$, при этом $G_0(y_1) = y_1$, $G_0(\Phi_1) = \Phi_1$, $g_0 = 0$, $y_k = y$, $G_k(y_k) = G_t(y)$, $g_k = g(t)$, $a_0 = b_0 = 0$,

$$\det\left(\widetilde{\Psi_{j+1} G_j\left(\Phi_{j+1}\right)}\right) \neq 0 . \tag{5}$$

Выполнение условия (5) обеспечивает реализуемость процесса построения $G_t(y), g(t)$, начиная с

$$G_1(y_1) = y_1 - \Phi_1\left(\widetilde{\Psi_1 \Phi_1}\right)^{-1} \int_{a_1}^{b_1} \Psi_1 y_1 d\tau , \qquad g_1 = \Phi_1\left(\widetilde{\Psi_1 \Phi_1}\right)^{-1} \mu_1 . \tag{6}$$

Отметим, что функция $g(t)$ удовлетворяет уравнениям (1), $G_t(y)$ – соответствующей однородной задаче. С помощью (6) на основе (3), (4) строятся $G_m(y_m), g_m$, $m = 2,3,\ldots,k$, в частности,

$$G_2(y_2) = y_2 - \Phi_1\left(\widetilde{\Psi_1\Phi_1}\right)^{-1}\int_{a_1}^{b_1}\Psi_1 y_2 d\tau - P_2\left(\widetilde{\Psi_2 P_2}\right)^{-1}\int_{a_2}^{b_2}\Psi_2\left[y_2 - \Phi_1\left(\widetilde{\Psi_1\Phi_1}\right)^{-1}\int_{a_1}^{b_1}\Psi_1 y_2 ds\right]d\tau,$$

$$g_2 = g_1 + P_2\left(\widetilde{\Psi_2 P_2}\right)^{-1}\left(\mu_2 - \int_{a_2}^{b_2}\Psi_2 g_1 d\tau\right); \qquad P_2 = \Phi_2 - \Phi_1\left(\widetilde{\Psi_1\Phi_1}\right)^{-1}\int_{a_1}^{b_1}\Psi_1\Phi_2 d\tau.$$

В [1] в случае $a_i = 0$, $b_i = 1$ выражение (2) представлено в явном виде. Для рассматриваемой задачи такое представление имеет весьма громоздкий вид; форма (2) является удобной при изучении задач, в которых соотношение (1) играет роль дополнительных условий, например в задачах математической теории управления. Сведение (1) к [1] приводит к усложнению соответствующего алгоритма.

Для иллюстрации применения алгоритма (3), (4) рассмотрим систему

$$\int_0^1 \tau x(\tau)d\tau = 3, \qquad \int_0^2 x(\tau)d\tau = 0. \tag{7}$$

Одно из возможных решений системы (7) имеет вид $x(t) = G_t(y) + g(t)$, где $G_t(y) = 6(t-1)\int_0^1 \tau y(\tau)d\tau + (1 - 3t/2)\int_0^2 y(\tau)d\tau + y(t)$, $g(t) = 18(1-t)$, при этом $g(t)$ удовлетворяет уравнениям (7); $\int_0^1 \tau G_\tau(y)d\tau = 0$, $\int_0^2 G_\tau(y)d\tau = 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** К решению интегральных задач / В. Н. Лаптинский // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 403–404.

2. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.

3. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах / Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскнер. – Москва; Ленинград: ГИТТЛ, 1950. – 549 с.

4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

5. **Лаптинский, В. Н.** К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств / В. Н. Лаптинский // IX Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. конф.: в 3 ч. – Гродно: ГрГУ, 2004. – Ч. 1. – С. 81–82.

6. **Лаптинский, В. Н.** Об одной задаче теории векторных пространств / В. Н. Лаптинский // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 3–7 нояб. 2008 г.: в 5 ч. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2008. – Ч. 3. – С. 65–66.