

УДК 533.6

К СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, А. А. РОМАНЕНКО

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Исследуется классическая задача (см. [1, с. 160] и др.)

$$f''' + a f f'' + b(1 - f'^2) = 0, \quad (1)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad (2)$$

где $f' = df(\eta)/d\eta$, $a = (m+1)/2$, $b = m$; m – параметр, характеризующий скорость $U(x) = U_0 x^m$ внешнего течения, при этом, согласно [1], $0 \leq m \leq 1$.

Поскольку численные методы малоэффективны для изучения влияния физических параметров задачи на формирование пограничного слоя, то разработка приближенных аналитических методов ее решения актуальна и ныне (см. библиографию в [2]).

В [3] приведено приближенное решение задачи (1), (2) в виде

$$f(\eta, m) = \lambda \int_0^{\eta} (\eta - \tau) \exp\left(-\left(\frac{m}{\lambda} \tau + \frac{m+1}{12} \lambda \tau^3\right)\right) d\tau, \quad (3)$$

где значения $\lambda = f''(0, m)$ вычисляются из трансцендентного уравнения

$$\lambda \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{m}{\lambda} \tau + \frac{m+1}{12} \lambda \tau^3\right)\right) d\tau - 1 = 0; \quad (4)$$

верхний предел в (4) обычно принимают равным $\eta^* \approx 8,8$ [1]. Приближение (3), (4) позволяет строить решение задачи (1), (2) для $0 \leq m \leq 1$, при этом с максимальной погрешностью до 6 % для $0 \leq m < 1/3$ и до 3 % для $1/3 \leq m \leq 1$.

В [3] также приведено приближение

$$f(\eta, m) = \lambda \int_0^{\eta} (\eta - \tau) \exp\left(-\left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda}\right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2\left(\frac{b}{\lambda}\right)^3 + (a - 2b)\lambda\right) \frac{\tau^3}{3!}\right)\right) d\tau, \quad (5)$$

где значения λ вычисляются из уравнения

$$\lambda \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda}\right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2\left(\frac{b}{\lambda}\right)^3 + (a - 2b)\lambda\right) \frac{\tau^3}{3!}\right)\right) d\tau - 1 = 0; \quad (6)$$

это приближение обеспечивает точность до 3 %, но оно приемлемо только при $0 \leq m < 1/3$, поскольку при $1/3 \leq m \leq 1$ несобственный интеграл в (6) расходится.

В данной работе дается приближение типа [3], основанное на (3), (5). Как и в [3], его назовем комплексным:

$$f(\eta, m) = \begin{cases} \lambda \int_0^\eta (\eta - \tau) \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b) \lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau, & m \in [0, 1/3); \\ \lambda \int_0^\eta (\eta - \tau) \exp \left(- \left(\frac{m}{\lambda} \tau + \frac{m+1}{12} \lambda \tau^3 \right) \right) d\tau, & m \in [1/3, 1]. \end{cases} \quad (7)$$

Приведенное комплексное приближение позволяет строить решение на всем промежутке $0 \leq m \leq 1$ с точностью до 3 %, приемлемой для прикладных расчетов [1]; оно значительно проще приближения из [3].

На рис. 1 приведены графики точного численного решения задачи (1), (2) и приближенного решения (7) для значений параметра $m = 1/4, 1/3, 2/3$.

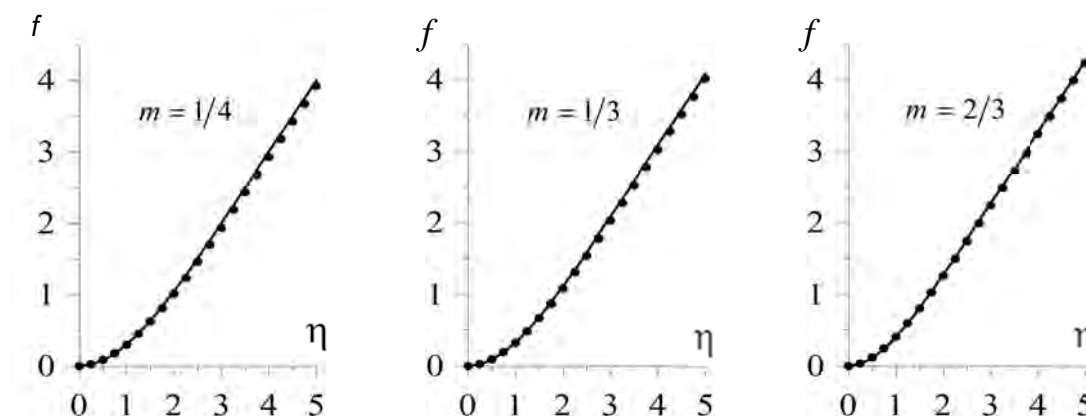


Рис. 1. График функции $f(\eta, m)$: точки соответствуют точному численному решению, сплошная линия – приближению (7)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва: Наука, 1974. – 712 с.
2. Khidir, A. A note on the solution of general Falkner – Skan problem by two novel semi-analytical techniques / A. Khidir // Propulsion and Power Research. – 2015. – Vol. 4, iss. 4. – P. 212–220.
3. Лаптинский, В. Н. К аналитическому решению задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Актуальные проблемы науки и техники: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Сарепул, 19–21 мая 2022 г. – Сарепул: СПИ, 2022. – С. 55–59.