УДК 517.927.4

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕНИЯ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА И РИККАТИ

О. А. МАКОВЕЦКАЯ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Исследуется задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + Q_1(t)X^2 + XQ_2(t)X + X^2Q_3(t) + F(t,X) \equiv G(t,X), \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где $(t,X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A,B,Q_i \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$ $(i=1,2,3)$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde{\rho}},\mathbb{R}^{n\times n})$; $I=[0,\omega]$, $D_{\tilde{\rho}} = \{(t,X); t\in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$; $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$. Предполагается, что функция $F(t,X)$ удовлетворяет условию Липшица по X локально в $D_{\tilde{\rho}}$, $F(t,0) \not\equiv 0$.

Предполагается еще, что правая часть в (1) ω-периодическая по *t*. Тогда ω-периодическое продолжение решения задачи (1), (2) на всю числовую ось будет периодическим решением уравнения (1).

Введены обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X): 0 \le t \le \omega, \|X\| \le \rho\},\ \tilde{A}(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)\,d\tau,\ \gamma = \|A^{-1}(\omega)\|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,$$

$$\beta = \max_t \|B(t)\|,\ \delta_i = \max_t \|Q_i(t)\|\ (i=1,2,3),$$

$$q(\rho) = \gamma\left[\frac{1}{2}\alpha(\alpha+\beta+L+6\delta\rho)\omega^2 + (\beta+L+6\delta\rho)\omega\right];$$

$$\varphi(\rho) = \gamma\left\{h + \frac{1}{2}\alpha\left[(\alpha+\beta+L)\rho + 3\delta\rho^2\right]\omega^2 + \left[h + (\beta+L)\rho + 3\delta\rho^2\right]\omega\right\},$$

где $\delta = \max\{\delta_i\}$, $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$. Краевая задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\bullet\|$ – фиксированная норма матриц в рамках определения этой алгебры, например, любая из норм, приведенных в [1, с. 21].

Данная работа является продолжением и обобщением результатов исследований, изложенных в [2, 3], на основе которых с применением конструктивных методов [4, гл. 2] получена следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия:

$$\det \tilde{A}(\omega) \ne 0, \quad (3)$$

$$q(\rho) < 1, \tag{4}$$

$$\varphi(\rho) \le \rho. \tag{5}$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением

$$X_{k+1}(t) = \tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)G\left(\tau, X_k(\tau)\right)d\tau - \int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)G\left(\tau, X_k(\tau)\right)d\tau -\right.$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[X_k(\tau)B(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F\left(\tau, X_k(\tau)\right)\right]d\tau\right\},\ k = 0,1,2,\ldots, \tag{6}$$

при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \varphi(\rho)$.

Здесь $X_0(t)$– произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащая шару $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$.

При получении алгоритма (6) используется условие (3) и матричный левосторонний регуляризатор [2].

На основе условий (4), (5) получена рекуррентная оценка

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \le q\|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},\ m = 1,2,\ldots,$$

с помощью которой выведена оценка, характеризующая скорость сходимости алгоритма (6), а также оценка области локализация решения

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \le \frac{q^k}{1-q}\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}},\ k = 0,1,2,\ldots,\ \|X\|_{\mathbb{C}} \le \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}.$$

Условия теоремы представлены в терминах задачи (1), (2), поэтому алгоритм (6) удобен для применений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.

2. **Лаптинский, В. Н.** Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, О. А. Маковецкая // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 7. – С. 919–928.

3. **Маковецкая, О. А.** Регуляризация периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Актуальные проблемы науки и техники: материалы I Междунар. науч.-техн. конф. – Ижевск: ИжГТУ им. М. Т. Калашникова, 2021. – С. 16–20.

4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: НАН Беларуси, 1998. – 300 с.