УДК 517.927.4

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И. И. МАКОВЕЦКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Исследуется краевая задача

$$\frac{dX}{dt}=\lambda\left(A(t)X+XB(t)+C_1(t)XC_2(t)+F(t,X)\right),\ X\in\mathbb{R}^{n\times n},\tag{1}$$

$$MX(0)+NX(\omega)=0,\tag{2}$$

где $A,B,C_i\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$ $(i=1,2)$, $F\in\mathbb{C}\left(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $I=[0,\omega]$, $D_{\tilde\rho}=\left\{(t,X):t\in I,\|X\|<\tilde\rho\right\}$, $\omega>0$, $0<\tilde\rho\le\infty$, M,N – постоянные $n\times n$-матрицы; функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0)\not\equiv 0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

С помощью качественных методов эта задача исследовалась в [1], с помощью конструктивных методов – в [2, 3]. В предлагаемой работе задача (1), (2) изучается в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций $X(t)$ с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}}=\max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [4, с.21].

Обозначения:

$$\gamma=\left\|\Phi^{-1}\right\|,\ \alpha=\max_t\|A(t)\|,\ \beta=\max_t\|B(t)\|,\ c_i=\max_t\|C_i(t)\|,\ h=\max_t\|F(t,0)\|,$$

$$m=\left\|M^{-1}(M+N)\right\|,\ q=\varepsilon\gamma\omega\left[(\alpha+\beta+c_1c_2+L)\left(m+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+c_1c_2)\omega\right)+L\right],$$

$$p=\varepsilon\gamma\omega h\left(m+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+c_1c_2)\omega+1\right),\ R=M^{-1}\left(M\tilde A(\omega)-M-N\right),$$

$$S=-\tilde B(\omega),\ \varepsilon=|\lambda|,\ \varepsilon_0=\rho/(q\rho+p),$$

где Φ – линейный матричный оператор; $\Phi X=RX-XS$;

$$\tilde H(\omega)=\int_0^\omega H(\tau)d\tau\left(H=A(\tau),B(\tau)\right).$$

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: $|\lambda|\le\varepsilon_0$, $\det M\ne 0$, матрицы *R*, *S* не имеют общих характеристических чисел, $q<1$, $p/(1-q)\le\rho$. Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением, при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \le p/(1-q)$.

Рекуррентное интегральное соотношение представляет собой итерационный алгоритм

$$X_{k+1}(t) = \lambda\Phi^{-1}\Big\{M^{-1}(M+N)\times$$

$$\times\int_t^{\omega}\Big(A(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)B(\tau)+C_1(\tau)X_k(\tau)C_2(\tau)+F\big(\tau,X_k(\tau)\big)\Big)d\tau+$$

$$+\int_0^{\omega}K_A(t,\tau)\Big(A(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)B(\tau)+C_1(\tau)X_k(\tau)C_2(\tau)+F\big(\tau,X_k(\tau)\big)\Big)+$$

$$+\Big(A(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)B(\tau)+C_1(\tau)X_k(\tau)C_2(\tau)+F\big(\tau,X_k(\tau)\big)\Big)K_B(t,\tau)\Big]d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}F\big(\tau,X_k(\tau)\big)d\tau\Big\},\quad k=0,1,2,\ldots,\qquad(3)$$

где $X(t)$ – произвольная матрица класса $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащая шару $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$,

$$K_H(t,\tau)=\begin{cases}H_1(\tau), & 0\le\tau\le t\le\omega,\\ -H_2(\tau), & 0\le t<\tau\le\omega,\end{cases}$$

$$H_1(\tau)\equiv\int_0^{\tau}H(\sigma)d\sigma,\; H_2(\tau)\equiv\int_{\tau}^{\omega}H(\sigma)d\sigma.$$

Приближенные решения, полученные по алгоритму (3), могут не удовлетворять краевому условию (2), поэтому разработка алгоритма без этого недостатка является актуальной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – P. 505–515.

2. **Маковецкий, И. И**. К двухточечной краевой задаче для нелинейно возмущенного матричного уравнения Ляпунова / И. И. Маковецкий // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 497–498.

3. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.

4. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.