УДК 517.927.4

РАЗРЕШИМОСТЬ И ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Д. В. РОГОЛЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Изучается система дифференциальных уравнений типа [1]

$$\frac{dX}{dt} \equiv G_1(t,X,Y) = A_1(t)X + C_1(t)XB_1(t) + X\big(S_1(t)X + S_2(t)Y\big) + F_1(t), \qquad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} \equiv G_2(t,X,Y) = A_2(t)Y + C_2(t)YB_2(t) + Y\big(P_1(t)X + P_2(t)Y\big) + F_2(t) \qquad (2)$$

с периодическими краевыми условиями

$$X(0) = X(\omega),\ Y(0) = Y(\omega), \qquad (3)$$

где X , Y – квадратные матрицы порядка n, матрицы $A_i(t)$, $B_i(t)$, $C_i(t)$, $S_i(t)$, $P_i(t)$, $F_i(t)$ $(i = 1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $I = [0,\omega]$; $\omega > 0$.

Периодические краевые задачи для матричных уравнений Ляпунова, Риккати и их обобщений играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1, 2].

В предлагаемой работе, являющейся обобщением и развитием [1], получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3), а также оценка области локализации решения.

Для исследования разрешимости задачи (1)–(3) используется модификация обобщённого принципа сжимающих отображений применительно к эквивалентной интегральной задаче

$$X(t) = \tilde{A}_1^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma\right)G_1(\tau,X(\tau),Y(\tau))d\tau - \right.$$

$$\left. -\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A_1(\sigma)d\sigma\right)G_1(\tau,X(\tau),Y(\tau))d\tau - \int_0^\omega\big[G_1(\tau,X(\tau),Y(\tau)) - A_1(\tau)X(\tau)\big]d\tau\right\}, \qquad (4)$$

$$Y(t) = \tilde{A}_2^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A_2(\sigma)d\sigma\right)G_2(\tau,X(\tau),Y(\tau))d\tau - \right.$$

$$\left. -\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A_2(\sigma)d\sigma\right)G_2(\tau,X(\tau),Y(\tau))d\tau - \int_0^\omega\big[G_2(\tau,X(\tau),Y(\tau)) - A_2(\tau)Y(\tau)\big]d\tau\right\}. \qquad (5)$$

Разрешимость задачи (4), (5) изучена в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций $Z(t)$ с нормой $\|Z\|_C = \max\limits_{t\in I}\|Z(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определённая норма матрицы в этой алгебре.

Обозначения:

$$D=\{(t,X,Y):0\le t\le\omega,\|X\|\le\rho_1,\|Y\|\le\rho_2\},\ \tilde{A}_i(\omega)=\int_0^\omega A_i(\tau)d\tau,\ \gamma_i=\left\|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha_i=\max_t\|A_i(t)\|,\ \beta_i=\max_t\|B_i(t)\|,\ \sigma_i=\max_t\|C_i(t)\|,\ \delta_i=\max_t\|S_i(t)\|,\ \mu_i=\max_t\|P_i(t)\|,$$

$$h_i=\max_t\|F_i(t)\|,\ q_{11}=\gamma_1\left[0{,}5\alpha_1(\alpha_1+\sigma_1\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega^2+(\sigma_1\beta_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega\right],$$

$$q_{12}=\gamma_1\delta_2\rho_1\omega(0{,}5\alpha_1\omega+1),\ q_{21}=\gamma_2\mu_1\rho_2\omega(0{,}5\alpha_2\omega+1),$$

$$q_{22}=\gamma_2\left[0{,}5\alpha_2(\alpha_2+\sigma_2\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega^2+(\sigma_2\beta_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega\right],$$

где $t\in I$, $\rho_1,\rho_2>0$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det\tilde{A}_i\ne 0\ (i=1,2)$; (6)

2)
$$\gamma_1\Big\{0{,}5\alpha_1\left[(\alpha_1+\sigma_1\beta_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega^2+ +\left[\sigma_1\beta_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2+h_1\right]\omega\Big\}\le\rho_1,$$
$$\gamma_2\Big\{0{,}5\alpha_2\left[(\alpha_2+\sigma_2\beta_2)\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega^2+ +\left[\sigma_2\beta_2\rho_2+\mu_2\rho_2^2+\mu_1\rho_1\rho_2+h_2\right]\omega\Big\}\le\rho_2;\qquad(7)$$

3) $q_{11}<1$, $\det(E-Q)>0$, где $E=diag(1,1)$, $Q=(q_{ij})$. (8)

Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима в области D. При этом справедлива оценка $Z\le(E-Q)^{-1}H$, где $Z=colon(\|X\|_C,\|Y\|_C)$, $H=colon\left(\|\mathcal{L}_1(0,0)\|_C,\|\mathcal{L}_2(0,0)\|_C\right)$.

Здесь через $\mathcal{L}_1(i=1,2)$ обозначены соответствующие интегральные операторы в (4), (5).

Условия (6)–(8) данной теоремы являются коэффициентными, т. е. выражены явно через исходные данные задачи (1)–(3), поэтому они удобны для применений при решении конкретных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати условий / В. Н. Лаптинский, Д. В. Роголев // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 10. – С. 1412–1420.

2. **Зубов, В. И.** Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва: Наука, 1975. – 496 с.