

МЕХАНИКА И НАДЕЖНОСТЬ МАШИН

УДК 624.023.87:539.3

С. В. БОСАКОВ, С. ГЕНФУД, Р. З. ШУТОВ

**СПОСОБ ЖЕМОЧКИНА В РАСЧЕТАХ КРУГЛЫХ ПЛИТ
 НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

*Белорусский национальный технический университет,
 Технический университет Галмы, Алжир,
 Могилевский государственный технический университет*

(Поступила в редакцию 22.12.2002)

Расчет круглых плит на упругом основании наиболее детально разработан для действия осесимметричной нагрузки [1, 2]; при произвольной нагрузке более эффективны численные методы конечных разностей [3], конечных элементов [4], вариационные методы [5]. Ниже предлагается рассчитывать круглые плиты на упругом основании в традиционной постановке [1] при действии произвольной нагрузки (рис.1) способом Жемочкина [6]. Рассмотрим круглую плиту на линейно деформируемом основании. Разобьем ее на участки Жемочкина в полярных координатах радиально расходящимися лучами из точки 0 и концентрическими окружностями (рис. 2). В центре каждого участка поставим вертикальную жесткую связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Считаем, что усилие в каждом стержне вызывает равномерную эпюру реактивных давлений в пределах участка Жемочкина. Данная многократно статически неопределимая система рассчитывается смешанным методом строительной механики, где за неизвестные принимаются линейное и угловое перемещения введенного в начале полярной системы координат защемления, усилия в поставленных связях Жемочкина. Система канонических уравнений способа Жемочкина имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^N \delta_{ik} X_k + \varphi_{0x} y_i + \varphi_{0y} x_i + u_0 + \Delta_{ip} \right) &= 0, \\ \sum_{k=1}^N X_k y_k - M_{px} &= 0, \\ \sum_{k=1}^N X_k x_k - M_{py} &= 0, \\ \sum_{k=1}^N X_k - R &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

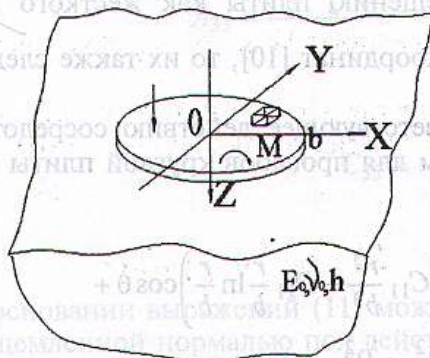


Рис. 1. Круглая плита на упругом основании

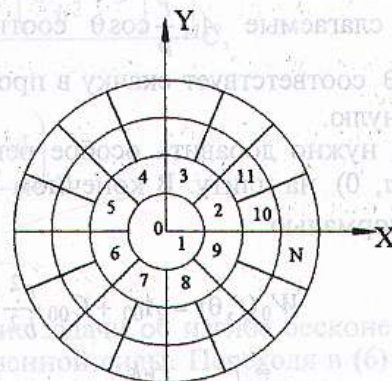


Рис. 2. Разбивка круглой плиты на участки Жемочкина

где X_k — усилие в связи Жемочкина с номером k ; $u_0, \varphi_{0x}, \varphi_{0y}$ — линейное и угловые перемещения введенного в начале полярной системы координат защемления (рис. 1); R, M_{px}, M_{py} — равнодействующая внешних сил и ее моменты относительно координатных осей (рис. 1); N — число участков Жемочкина.

Коэффициенты при неизвестных в системе (1) δ_{ik} , согласно способу Жемочкина [6], определяется так:

$$\delta_{ik} = V_{ik} + W_{ik}. \quad (2)$$

Здесь V_{ik} — вертикальное перемещение центра участка Жемочкина с номером i на поверхности упругого основания от действия единичной силы, равномерно распределенной по площади участка с номером k на поверхности упругого основания. Определяется по формуле [5]; W_{ik} — прогиб точки i круглой плиты с защемленной нормалью от действия вертикальной единичной силы, приложенной в точке k плиты. В [7] приведено приближенное выражение для W_{ik} в случае бесконечной плиты, так как в одном из слагаемых не выполняется теорема о взаимности перемещений. Ниже мы получим точное выражение для определения прогибов круглой плиты с защемленной нормалью от действия вертикальной сосредоточенной силы и уточним решение [7] для бесконечной плиты с защемленной нормалью как частный случай. Также отметим, что выражение для определения прогибов круглой плиты с защемленной нормалью, приведенное в [8], содержит ряд ошибок.

Известно, что функция прогибов круглой плиты под действием сосредоточенной силы удовлетворяет следующему бигармоническому уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 W(r, \theta) = 0. \quad (3)$$

Будем искать решение (3) в виде совокупности частных решений Клебша [9]

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \cos n\theta, \quad (4)$$

$$W_0(r) = A_{00} + B_{00} \ln \frac{r}{b} + C_{00} \frac{r^2}{b^2} + D_{00} \frac{r^2}{b^2} \ln \frac{r^2}{b^2},$$

$$W_1(r) = A_{11} \frac{r}{b} + B_{11} \frac{b}{r} + C_{11} \frac{r^3}{b^3} + D_{11} \frac{r}{b} \ln \frac{r}{b},$$

$$W_k(r) = A_{k,k} \frac{r^k}{b^k} + B_{k,k} \frac{b^k}{r^k} + C_{k,k+2} \frac{r^{k+2}}{b^{k+2}} + D_{k,k-2} \frac{b^{k-2}}{r^{k-2}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Для круглой плиты с защемленной в начале полярной системы координат нормалью исходя из граничных условий для $W(0, 0)$ и $\frac{\partial W(0, \theta)}{\partial r}$ необходимо принять

$$B_{00} = B_{11} = B_{k,k} = D_{k,k-2} = 0. \quad (5)$$

Так как слагаемые $A_{11} \frac{r}{b} \cos \theta$ соответствует перемещению плиты как жесткого целого и $D_{20} \cos 2\theta$ соответствует скачку в прогибах в начале координат [10], то их также следует приравнять нулю.

К (4) нужно добавить особое решение [3], соответствующее действию сосредоточенной силы $P(a, 0)$ на плиту. В конечном итоге принимаем для прогибов круглой плиты с защемленной нормалью

$$W_0(r, \theta) = A_{00} + C_{00} \frac{r^2}{b^2} + D_{00} \frac{r^2}{b^2} \ln \frac{r^2}{b^2} + \left(C_{11} \frac{r^3}{b^3} + D_{11} \frac{r}{b} \ln \frac{r}{b} \right) \cos \theta + \sum_{k=2}^{\infty} \left(A_{k,k} \frac{r^k}{b^k} + C_{k,k+2} \frac{r^{k+2}}{b^{k+2}} \right) \cos k\theta + C \frac{\rho^2}{b^2} \ln \frac{\rho^2}{b^2}, \quad (6)$$

$$\rho^2 = a^2 - 2ar \cos \theta + r^2, \quad C = \frac{Pb^2}{16\pi D}.$$

Из условия $W(0, \theta) = 0$ сразу получаем

$$A_{00} = -C \frac{a^2}{b^2} \ln \frac{a^2}{b^2}. \quad (7)$$

Разложим особое решение в ряд по косинусам кратных углов для $r > a$. Получаем [11]

$$\frac{\rho^2}{b^2} \ln \frac{\rho^2}{b^2} = \frac{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2}{b^2} \left[\ln \frac{r^2}{b^2} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^k \frac{\cos k\theta}{k} \right]. \quad (8)$$

Подставим (8) в (6) и найдем радиальные момент и приведенную поперечную силу по следующим формулам:

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

$$V_r = -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + (1-\nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 W}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right]. \quad (9)$$

Исходя из статических граничных условий на краю плиты

$$M_r|_{r=b} = V_r|_{r=b} = 0, \quad (10)$$

приравняем (9) нулю при $r = b$. Так как сумма тригонометрического ряда равна нулю, когда каждый член ряда равен нулю, то приравниваем нулю коэффициенты при одинаковых гармониках. Получаем

$$D_{00} = -C, \quad C_{00} = \frac{a^2}{b^2} \frac{1-\nu}{1+\nu} C,$$

$$D_{11} = 4C \frac{a}{b}, \quad C_{11} = 2C \frac{a^3}{b^3} \frac{1-\nu}{3+\nu},$$

$$A_{22} = \frac{2 \frac{a^2}{b^2} \left[\frac{a^2}{b^2} - 6 - 2 \frac{a^2}{b^2} \nu + \left(\frac{a^2}{b^2} - 2 \right) \nu \right]}{(3+\nu)(\nu-1)} C,$$

$$C_{24} = \frac{2(\nu-1)}{3(3+\nu)} \left(3 \frac{a^2}{b^2} - 2 \frac{a^4}{b^4} \right) C,$$

$$A_{33} = \frac{2 \frac{a^3}{b^3} \left[6 \frac{a^2}{b^2} - 17 - 2 \left(6 \frac{a^2}{b^2} - 5 \right) \nu + \left(6 \frac{a^2}{b^2} - 9 \right) \nu^2 \right]}{9(3+\nu)(\nu-1)} C, \quad (11)$$

$$C_{35} = -\frac{a^3}{3b^3} \frac{(1-\nu) \left(3 \frac{a^2}{b^2} - 4 \right)}{3+\nu} C,$$

...

На основании выражений (11) можно найти решение задачи об изгибе бесконечной плиты с защемленной нормалью под действием сосредоточенной силы. Переходя в (6) к пределу при $b \rightarrow \infty$ с учетом (11) и вводя некоторый линейный размер d , получаем для прогибов бесконечной плиты с защемленной нормалью

$$W(r, \theta) = \frac{Pd^2}{16\pi D} \left[-\frac{a^2}{d^2} \ln \frac{a^2}{d^2} - \frac{r^2}{d^2} \ln \frac{r^2}{d^2} + \frac{4ar}{d^2} \cos \theta \left(1 + \ln \frac{ar}{d^2} \right) + \frac{\rho^2}{d^2} \ln \frac{\rho^2}{d^2} \right]. \quad (12)$$

В формулу (12) введено слагаемое с множителем $r \cos \theta$, которое не влияет на напряженное состояние плиты, но обеспечивает выполнение теоремы о взаимности перемещений [9]. Согласно [3], второе, третье и четвертое слагаемые в формуле (12) соответствуют действию сосредоточенных силы и момента в начале координат и сосредоточенной силы в точке плиты $(a, 0)$.

По формулам (2) определяются коэффициенты канонических уравнений (1), что позволяет рассчитать круглую плиту на упругом основании под действием произвольной внешней нагрузки.

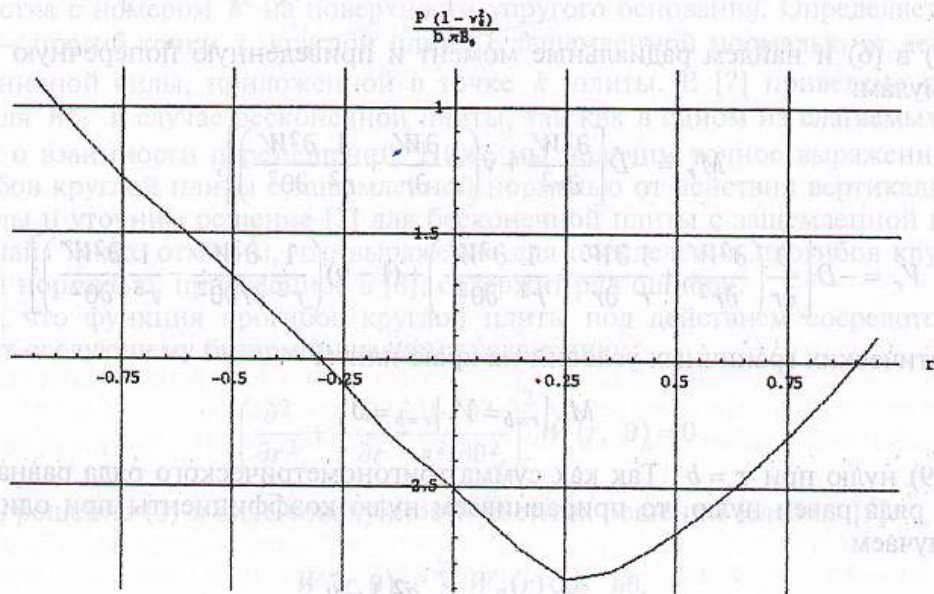


Рис. 3. Распределение осадок в круглой плите на упругом полупространстве при $\frac{E_0 b^3}{(1 - \nu_0^2) D} = 62,83$ и действии сосредоточенной силы в точке плиты $r = 0,25b$

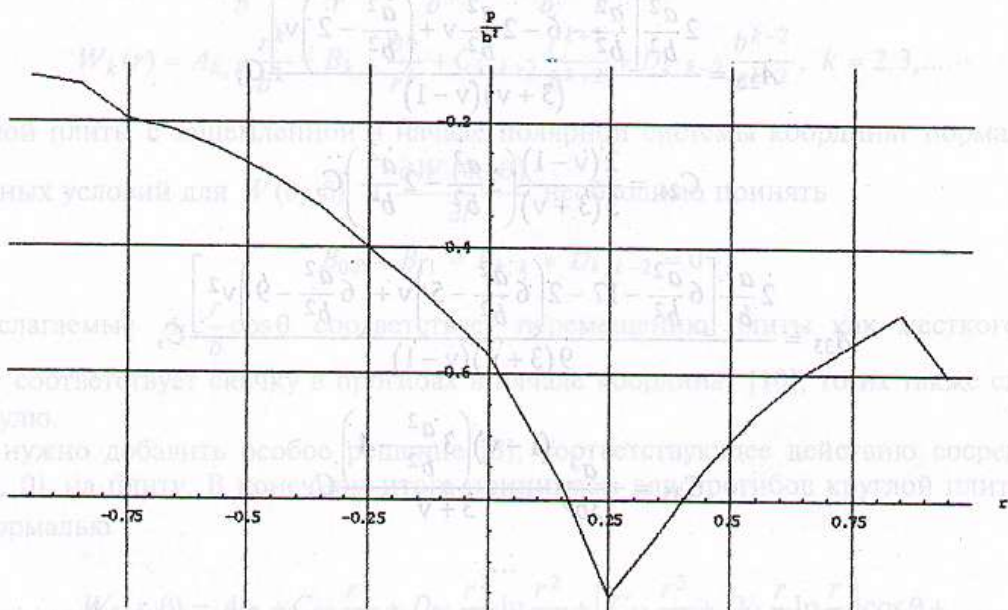


Рис. 4. Распределение реактивных давлений на контакте круглой плиты с упругим полупространством при $\frac{E_0 b^3}{(1 - \nu_0^2) D} = 62,83$ и действии сосредоточенной силы в точке плиты $r = 0,25b$

На рис. 3, 4 приведены результаты расчета круглой плиты, лежащей на упругом полупространстве под действием сосредоточенной силы. Они могут найти применение при расчете круглых фундаментных плит.

Литература

1. Горбунов - Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. М., 1984.
2. Развитие теории контактных задач в СССР. М., 1976.
3. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты. М., 1984.
4. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред. М., 1974.
5. Генфуд С. // Вестні НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. 2001. № 3. С. 116—122.
6. Жемочкин Б. Н., Синицин А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М., 1962.
7. Босаков С. В., Генфуд С. // Вестник БГТУ. 2001. № 7. С. 11—12.
8. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Пластины, диски, балки-стенки (прочность, устойчивость и колебания). Киев, 1959.
9. Тимошенко С. П., Войновский - Кригер С. Пластинки и оболочки. М., 1963.
10. Ржаницын А. Р. Строительная механика. М., 1991.
11. Градштейн А. Р., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.

S. V. BOSAKOV, S. GENFOUD, R. Z. SHUTOV

THE GEMOCHIN'S METHOD FOR THE CALCULATIONS OF CIRCULAR PLATES ON ELASTIC BASE

Summary

The solution of contact problem for circular plate on an elastic base under arbitrary load by Gemochin's method is presented.

$$V_{nm} = \left[J_{nm}^{(m)} (\sin \eta) + \varepsilon_{nm} Q_{nm}^{(m)} (\sin \eta) \right] J_{nm}^{(m)} (\theta) \quad (8)$$

(1) С помощью закона Гука в цилиндрических координатах можно получить общее выражение деформаций в упругом полупространстве в параметрической форме [5], в частности для сжатого эллипсоида вращения имеем:

$$w = \frac{a}{2G} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_n^{(m)}(\cos \theta) Q_n^{(m)}(\cos \eta) \left[J_{nm}^{(m)}(\sin \eta) + \varepsilon_{nm} Q_{nm}^{(m)}(\sin \eta) \right] J_{nm}^{(m)}(\theta) \quad (9)$$

Здесь η и θ представляют собой соответствующие углы в цилиндрических координатах. Для того чтобы получить решение задачи о деформации упругого полупространства под действием сосредоточенной силы, лежащей в центре основания, необходимо использовать закон Гука в цилиндрических координатах и координаты η и θ заменить функциями $\sin \eta$ и θ соответственно.

Используя интегральное представление функции Грина для эллипсоида вращения, можно преобразовать вышеприведенные функции $J_{nm}^{(m)}$ и $Q_{nm}^{(m)}$ для эллипсоида вращения в новые функции для сферы. При этом гармонические функции в представлении Папковича—Неллера преобразуются по Кельвину [2, 6]

Простому фактору θ при переходе к сферической системе координат соответствует фактор $\sin \theta$ в цилиндрической системе координат. Тогда логарифмические функции $J_{nm}^{(m)}$ и $Q_{nm}^{(m)}$ в координатах (η, θ) и (η, θ) соответственно имеют место

$$J_{nm}^{(m)} = \left[J_{nm}^{(m)} (\sin \eta) + \varepsilon_{nm} Q_{nm}^{(m)} (\sin \eta) \right] J_{nm}^{(m)} (\theta) \quad (10)$$