

УДК 519.8

Г. С. ЛЕНЕВСКІЙ, К. В. ОВСЯННИКОВ

МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ
С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОДЪЕМНЫХ УСТАНОВОК

Могилевский государственный технический университет

(Поступила в редакцию 17.05.2002)

Подъемные установки — очень широкий класс промышленных устройств, сюда входят: рудничные грузоподъемные и грузопассажирские установки, грузовые, пассажирские, скоростные лифты, краны и др. Как правило, все они имеют протяженные в пространстве размеры, которые могут варьироваться от десятков (лифты, краны) до тысяч метров (рудничные грузоподъемные установки). Основной механический элемент в данных установках — канат, который в общем случае является звеном с распределенными параметрами. До настоящего времени подобные установки представлялись в виде одно- (абсолютно жесткая), двух- и в некоторых случаях трехмассовой расчетных схем. Подобный подход не учитывал то, что канат обладает распределенно-упругими свойствами и, следовательно, активно влияет на усилия в механических узлах установки.

Адекватное описание каната позволит расширить представление о процессах, происходящих при работе установок, тем самым увеличить скорость движения и производительность, снизить опасные напряжения в механических узлах, уменьшить вредное воздействие вибраций, возникающих в процессе работы, увеличить срок службы установки, уменьшить износ и расход электроэнергии.

Как правило, практически любую подъемную установку можно представить в виде двух сосредоточенных масс, которые соединены между собой распределенно-упругим звеном (канатом). Многоканатные системы легко сводятся к одноканатной, в пространственно разветвленных системах всегда можно выделить звенья с наибольшей податливостью, остальные звенья представить как жесткие. Необходимо также принять следующие допущения: канат идеализируется как стержень, испытывающий продольные колебания, а сосредоточенные массы представляются как бесконечные скачки плотности. Такую систему можно описать следующими уравнениями, при принятых допущениях:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Delta F(x, t)}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Delta v(x, t)}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \Delta v(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{E S} \frac{\partial \Delta F(x, t)}{\partial t} &= 0, \\ m_1 \frac{d \Delta v_b}{dt} &= \Delta F_d(t) - \Delta F_b(t), \\ m_2 \frac{d \Delta v_h}{dt} &= \Delta F_h(t), \end{aligned}$$

где $\Delta F(x, t)$ — приращение усилия в сечении x каната; x — пространственная координата объекта; ρ — масса единицы длины каната; $v(x, t)$ — скорость смещения сечения x каната; E и S — модуль упругости и площадь поперечного сечения каната; v_b и v_h — скорости смещения верхнего и нижнего концов каната; ΔF_d — приращение движущего усилия; F_b и F_h — усилия в верхнем и нижнем сечениях каната.

Известно решение этой системы, передаточная функция движущего усилия к скорости перемещения для любого сечения каната

$$W(p) = \frac{\Delta v(\xi, p)}{\Delta F_d(p)} =$$

$$= \frac{\mu_2 p \operatorname{ch}(p\xi) \operatorname{sh}(p) + \mu_k \operatorname{ch}(p\xi) \operatorname{ch}(p) - \mu_2 p \operatorname{sh}(p\xi) \operatorname{ch}(p) - \mu_k \operatorname{sh}(p\xi) \operatorname{sh}(p)}{\mu_1 \mu_2 p^2 \operatorname{sh}(p) + \mu_1 \mu_k p^2 \operatorname{ch}(p) + \mu_k^2 \operatorname{sh}(p)}.$$

Или после преобразования

$$W(p) = \frac{\Delta v(\xi, p)}{\Delta F_d(p)} = \frac{\operatorname{ch}(p\xi) - K(p) \operatorname{sh}(p\xi)}{\mu_1 p + K(p) \mu_k}, \quad (2)$$

где $K(p) = \frac{p \mu_2 \operatorname{ch}(p) + \mu_k \operatorname{sh}(p)}{p \mu_2 \operatorname{sh}(p) + \mu_k \operatorname{ch}(p)}$; $\xi = x/l$ — координата выходной точки в отн. ед.; $\mu_i = m_i/m_\Sigma$ — i -я сосредоточенная масса в отн. ед.; $\mu_k = m_k/m_\Sigma$ — относительная масса каната в отн. ед.; m_Σ — суммарная приведенная масса установки.

Данное решение получено путем двойного преобразования Лапласа, сначала по относительному времени, а затем по пространственной координате. Далее совершается переход из области изображений по переменной λ к оригиналу по переменной ξ . Полное решение приведено в [1]. В качестве выходной величины принимается скорость перемещения любого сечения каната.

Особый интерес представляет исследование поведения такой модели в частотной и во временной областях. Можно отметить, что передаточную функцию (2) невозможно использовать непосредственно при исследованиях во временной области в связи с ее трансцендентностью, а только после приведения ее к конечномерному виду. Традиционно процесс получения конечномерной модели называется аппроксимацией, в научной литературе имеется ряд публикаций по этому вопросу, поэтому в настоящей статье он рассматриваться не будет. Приведем пример расчета подобных передаточных функций, на основе данных по грузоподъемной установке БЦКБ («Беларуськалий», г. Солигорск). Установка для высоты подъема 1000 м имеет следующие относительные массы: $\mu_1 = 0,878$, $\mu_2 = 0,091$ и $\mu_k = 0,029$.

Наиболее интересны частотные характеристики в различных точках каната, т. е. в разных координатах распределенно-упругого звена. Это обусловлено тем, что при построении систем автоматического управления (САУ) подобными объектами необходимо введение в САУ дополнительной информации с промежуточной координаты упругого объекта. При этом требуется определить наиболее оптимальную точку подключения датчика. Частотные характеристики представлены на рис. 1. Координата выходной точки изменяется с шагом 0,2.

По [1] точка подключения выбирается таким образом, чтобы на возможно большем диапазоне частот обеспечивалось чередование полюсов и нулей передаточной функции, или чередование резонансов и антирезонансов частотной характеристики. Этому условию удовлетворяет случай $\xi = 0,2$ (рис 1, б). Данная точка несет наибольшую информацию о движении объекта.

При аппроксимации выражения (2) методом простейших дробей, аппроксимирующая модель представляется следующим образом:

$$W(p) = \sum_{n=-N}^N \frac{\operatorname{Re} s W(p_n)}{p - p_n} \quad (3)$$

где p_n — n -й полюс передаточной функции.

Таким образом, для получения конечномерной модели достаточно знать полюса бесконечномерной передаточной функции и вычеты в полюсах. Для случая с подъемной установкой значения полюсов и вычетов (для случая $\xi = 0,0$) приведены в таблице.

Данные расчета передаточных функций

P	$-34,56i$	$-31,42i$	$-28,28i$	$-25,14i$	$-22,00i$	$-18,86i$	$-15,73i$	$-12,59i$	$-9,46i$
$\operatorname{Re} s$	$3,05e-5$	$3,57e-5$	$4,57e-5$	$5,89e-5$	$7,55e-5$	$1,03e-4$	$1,50e-4$	$2,40e-4$	$4,27e-4$
P	$-6,33i$	$-3,25i$	$-0,574i$	0	$0,574i$	$3,25i$	$6,33i$	$9,46i$	$12,59i$
$\operatorname{Re} s$	$9,23e-4$	$3,41e-3$	$6,58e-2$	$1,00$	$6,58e-2$	$3,41e-3$	$9,23e-4$	$4,27e-4$	$2,40e-4$
P	$15,73i$	$18,86i$	$22,00i$	$25,14i$	$28,28i$	$31,42i$	$34,56i$	$-$	$-$
$\operatorname{Re} s$	$1,50e-4$	$1,03e-4$	$7,55e-5$	$5,89e-5$	$4,57e-5$	$3,57e-5$	$3,05e-5$	$-$	$-$

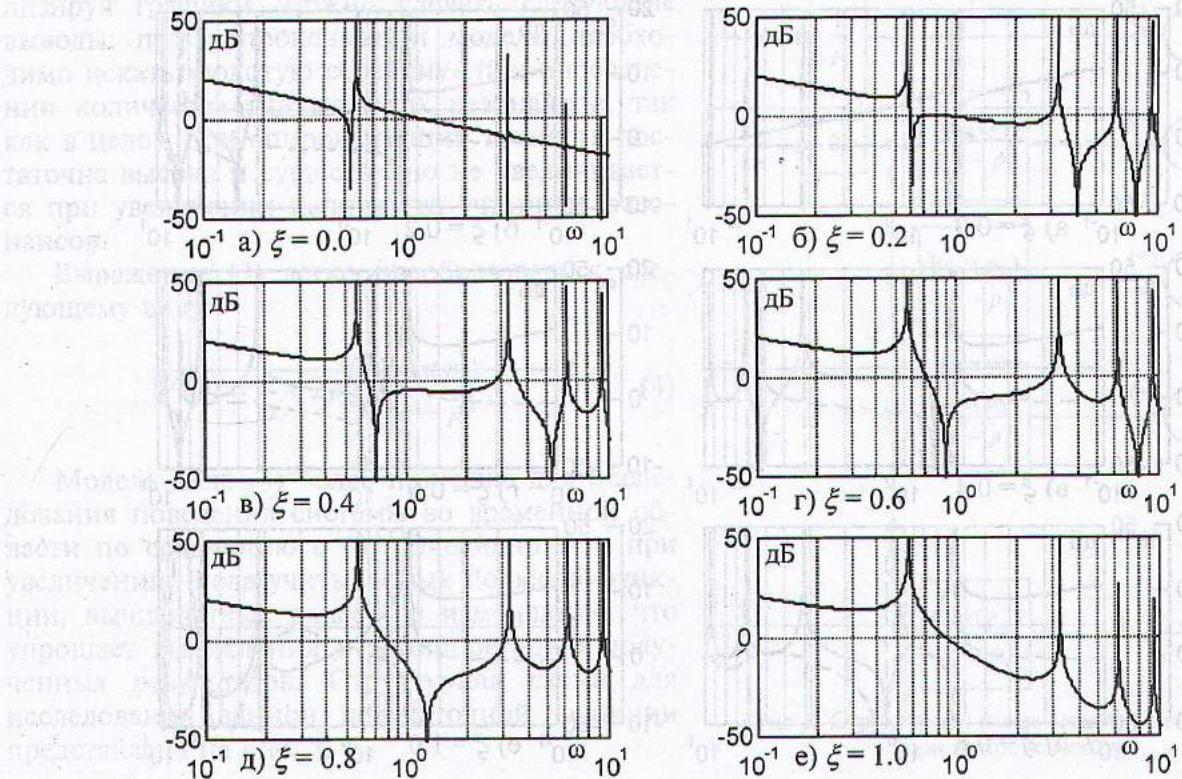


Рис. 1. ЛАЧХ каната в разных пространственных точках (а–е), исходная модель

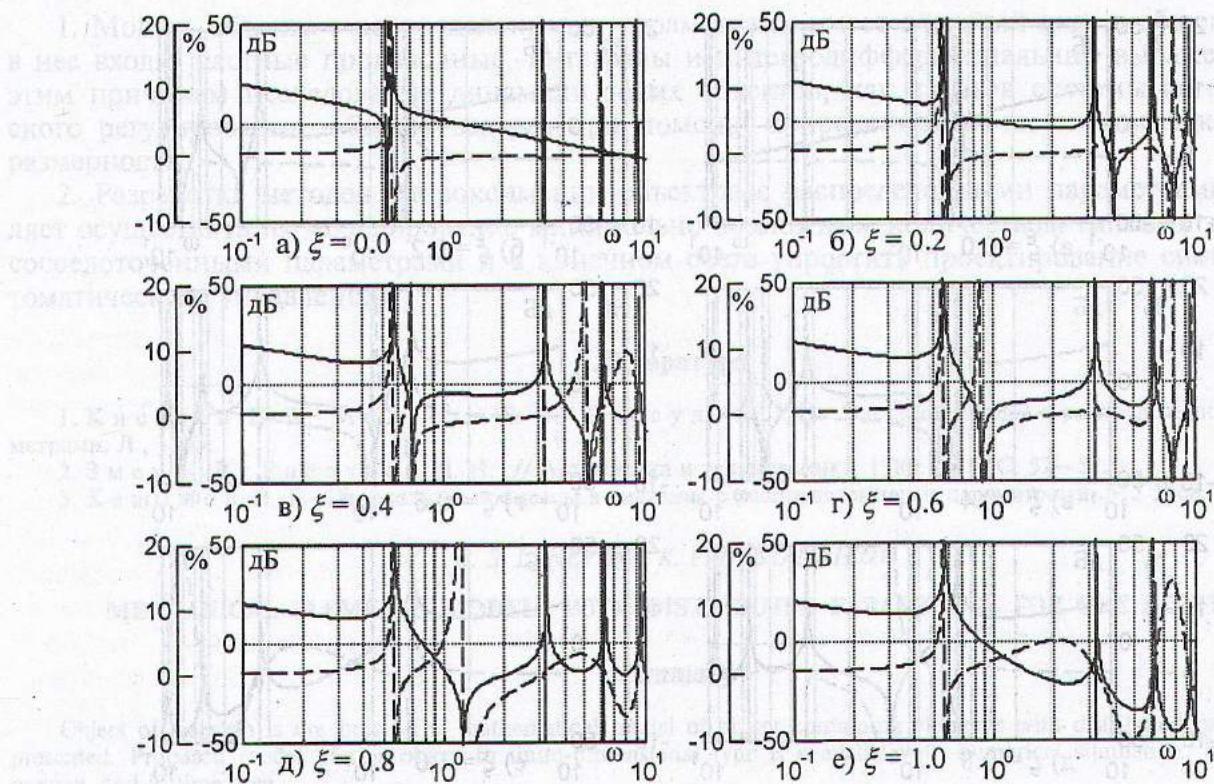


Рис. 2. ЛАЧХ каната в разных пространственных точках (а–е), модель, полученная при аппроксимации (учет четырех резонансов)

На рис. 2, 3 и 4 показаны логарифмические амплитудно-частотные характеристики аппроксимирующих моделей, которые получены при учете четырех, семи и двенадцати резонансов соответственно. На рисунках приведены первые четыре резонанса. Сплошной линией показаны характеристики полученных моделей, а ошибка по отношению к исходной модели — штриховой линией. Точность аппроксимации такова, что характеристика исходной модели практически сливается с характеристикой, полученной нами, поэтому она не представлена на

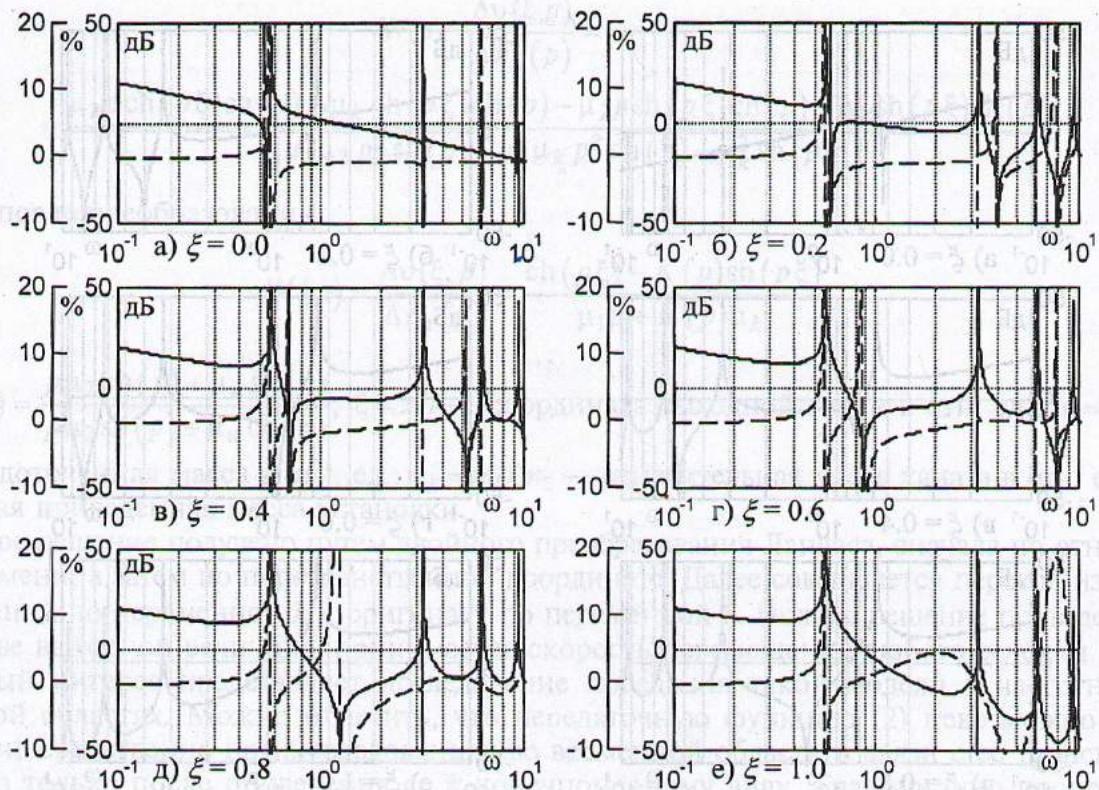


Рис. 3. ЛАЧХ каната в разных пространственных точках (а—е), модель, полученная при аппроксимации (учет семи резонансов)

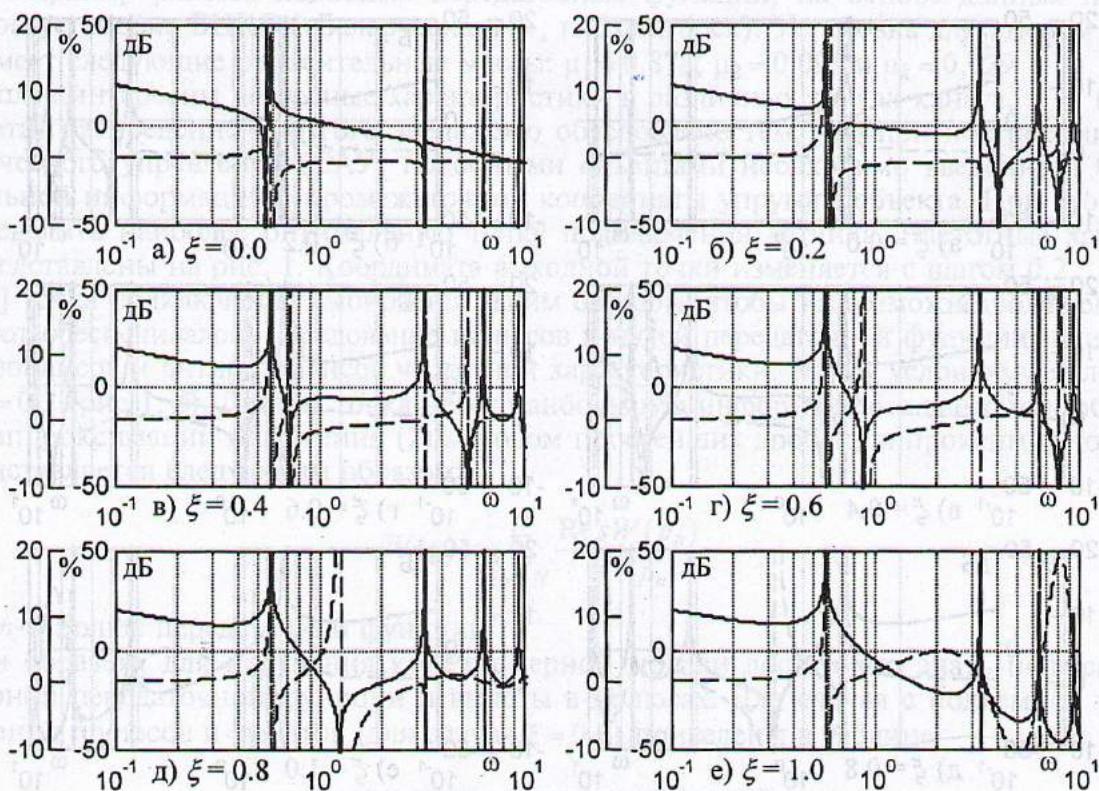


Рис. 4. ЛАЧХ каната в разных пространственных точках (а—е), модель, полученная при аппроксимации (учет двенадцати резонансов)

рисунках. Хорошо видно, что ошибка на гладких участках близка к нулю, в районе резонансов весьма мала, однако в области антирезонансов достаточно велика и уменьшается при учете большего количества резонансов. Для работы модели во временной области по опыту [1, 3] особое влияние на переходные процессы оказывают именно резонансные свойства, влияние антирезонансов на динамику является не существенным. Данная проблема требует более детального изучения, что будет определять дальнейшую тематику исследований. Ана-

лизируя графики, можно сделать следующие выводы: при аппроксимации модели необходимо искать «золотую середину» при определении количества учитываемых резонансов, так как в целом при аппроксимации точность достаточно высока и существенно не увеличивается при увеличении количества учтенных резонансов.

Выражение (3) легко преобразовать к следующему виду:

$$W(p) = \frac{1}{p} + 2p \sum_{i=1}^N \frac{\operatorname{Re} s(p_i)}{p^2 - p_i^2}. \quad (4)$$

Модель вида (4) более пригодна для исследования поведения системы во временной области по сравнению с (3). Очевидно, что при увеличении числа учитываемых полюсов функции, вычисленные ранее, не изменяются, что упрощает вычисления и интерпретацию полученных результатов. Структурная схема для исследования данной передаточной функции представлена на рис. 5.

Выводы

1. Модель объекта с распределенными параметрами имеет сложный вид, в общем случае в нее входят частные производные, интегралы и интегродифференциальные выражения. По этим причинам исследование динамики таких объектов, как звеньев системы автоматического регулирования, обычно ведется при помощи аппроксимации их системой конечной размерности.

2. Разработка методов аппроксимации объектов с распределенными параметрами позволяет осуществить их моделирование минимально возможным количеством типовых звеньев с сосредоточенными параметрами и в конечном счете упростить проектирование системы автоматического управления.

Литература

- Киселев Н. В., Мядзель В. Н., Рассудов Л. Н. Электроприводы с распределенными параметрами. Л., 1985.
 - Змей К. В., Рассудов Л. Н. // Автоматика и телемеханика. 1982. № 5. С. 52–57.
 - Кадымов Я. Б. Переходные процессы в системах с распределенными параметрами. М., 1968.

G. S. LENEVSKY K. V. OKSYANNIKOV

MECHANICAL ELEMENTS MODELS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS FOR ORE HOISTS

Summary

Object of research is ore hoist. The mathematical model of object containing elements with distributed parameters is presented. Proposed model of this object in finite-dimensional type is available with numerical simulation, both in frequency and in time area.

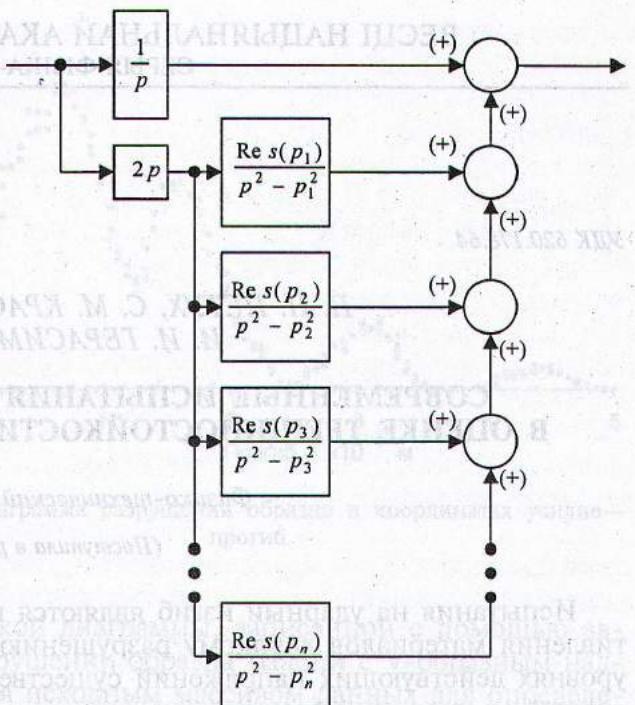


Рис 5. Структурная схема модели, полученной при аппроксимации