

УДК 624.023.87:539.3

С. Д. СЕМЕНЮК

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ФУНДАМЕНТОВ КАК СИСТЕМЫ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК НА УПРУГОМ КЛИНОВИДНОМ ОСНОВАНИИ

Для обеспечения безотказной работы при эксплуатации и предотвращения аварий зданий и сооружений, возводимых в сложных инженерно-геологических условиях, железобетонные фундаменты устраивают в виде непрерывных стен или железобетонных перекрестных балок. При проектировании фундаментов в виде системы перекрестных балок расчет осуществляют в упрощенном предположении их шарнирного сопряжения [1, 2], что не соответствует реальной работе системы и требует существенного уточнения. На подрабатываемых территориях рекомендует принимать расчетную схему деформаций оснований в виде смещения основания параллельно начальной горизонтальной поверхности с образованием вертикального уступа от 0 до 25 см [2].

В настоящей работе за расчетную модель рассматриваемого фундамента в аварийном состоянии была принята система перекрестных балок с жесткими узлами на упругом клиновидном основании (рис. 1). При этом большая часть подошвы пространственного фундамента находится в контакте с гранью клина, у меньшей части контакт отсутствует. Длинная сторона системы расположена параллельно ребру клина. Считаем, что система перекрестных балок представляет совокупность жестко соединенных между собой стержней, часть которых находится на упругом клиновидном основании.

При расчете принимаем, что реактивные касательные давления в контактной зоне стержней не учитываются; распределение нормативных реактивных давлений по ширине каждого стержня считается постоянным [1]; на контакте системы перекрестных балок с упругим основанием могут возникать как сжимающие, так и растягивающие реактивные давления. Внешняя нагрузка действует перпендикулярно плоскости осей стержней, образующих систему перекрестных балок.

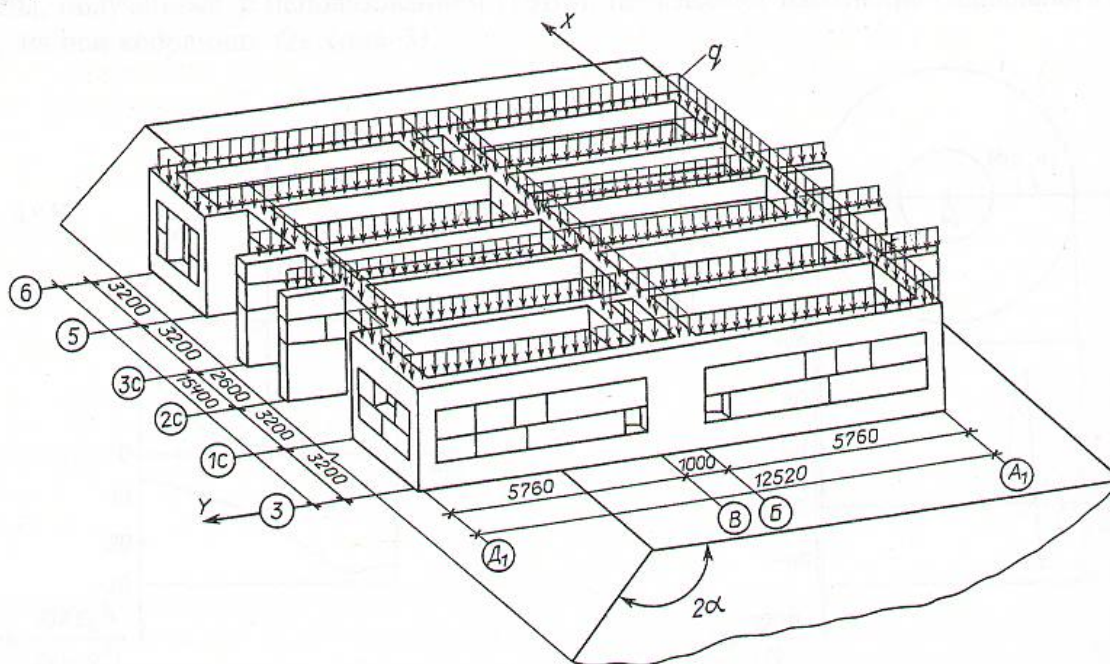
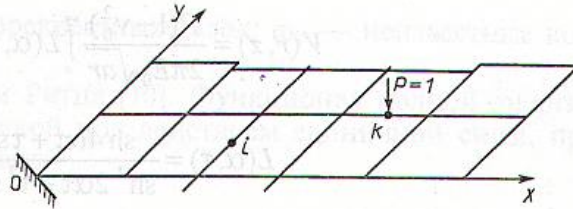


Рис. 1. Пространственный железобетонный фундамент в виде системы перекрестных балок на упругом клиновидном основании

Рис. 2. Основная система смешанного метода



Расчет будем вести способом Б. Н. Жемочкина [4]. С этой целью каждый стержень системы разобьем на прямоугольные участки. В центре каждого участка поставим абсолютно жесткие связи, через которые осуществляется контакт системы с упругим основанием. Считаем, что усилие в каждой связи вызывает равномерное распределение реактивных давлений в пределах участка. Полученную многократно статически неопределимую систему рассчитываем смешанным методом строительной механики, приняв за неизвестные усилия в связях Б. Н. Жемочкина, линейные и угловые перемещения введенного защемления на краю системы перекрестных балок (рис. 2).

Система канонических уравнений способа Б.Н. Жемочкина для нахождения неизвестных имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \delta_{ik} X_k + u_0 + \varphi_{ox} y_i + \varphi_{oy} x_i + \Delta_{ip} &= 0, \\ - \sum_{k=1}^N X_k y_k + M_{px} &= 0, \\ - \sum_{k=1}^N X_k x_k + M_{py} &= 0, \\ - \sum_{k=1}^N X_k + R &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где δ_{ik} — взаимное вертикальное перемещение концов i -й разрезанной связи Б. Н. Жемочкина от единичных сил, приложенных к связи с номером k в основной системе (рис. 2); Δ_{ip} — прогиб центра участка с номером i основной системы (рис. 2) от внешней нагрузки; $u_0, \varphi_{ox}, \varphi_{oy}$ — линейные и угловые перемещения введенного защемления на краю основной системы (рис. 2); X_i — усилие в связи Б. Н. Жемочкина с номером i ; R, M_{px}, M_{py} — равнодействующая внешних сил, приложенных к системе перекрестных балок, и моменты равнодействующей относительно осей OX и OY (рис. 2); N — число участков Б. Н. Жемочкина на системе перекрестных балок.

Коэффициенты при неизвестных усилиях в связях Б. Н. Жемочкина δ_{ik} зависят от осадок упругого основания W_{ik} и прогибов основной системы (рис. 2) Z_{ik} и равны [3]:

$$\begin{aligned} \delta_{ik} &= W_{ik} + Z_{ik}, \\ W_{ik} &= \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 h} (F_{ik}^0 + F_{ik}^1), \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь W_{ik} — перемещение центра участка Б. Н. Жемочкина с номером i на поверхности упругого основания от действия единичной силы, распределенной по участку с номером k ; E_0, ν_0, h — модуль деформации, коэффициент Пуассона и линейный размер (например, толщина слоя) для упругого основания.

Подчеркиваем, что в (2) F_{ik}^0 характеризует осадку упругого однородного изотропного полупространства, а F_{ik}^1 корректирует F_{ik}^0 для данной модели упругого основания [5].

Построение функции Грина для упругого клиновидного основания. Как показано в [6], вертикальные перемещения загруженной грани упругого пространственного клина от действия нормальной сосредоточенной силы с достаточной для практических расчетов точностью в цилиндрической системе координат определяются следующими выражениями:

$$V(r, z) = \frac{P(1-\nu_0^2)}{2\pi E_0 \sqrt{ar}} \int_0^\infty L(\alpha, \tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \mu) d\tau, \quad (3)$$

$$L(\alpha, \tau) = \frac{\operatorname{sh} 4\alpha\tau + \tau \sin 4\alpha}{\operatorname{sh}^2 2\alpha\tau - \tau^2 \sin^2 2\alpha} \operatorname{th} \pi\tau, \quad (4)$$

$$\operatorname{ch} \mu = \frac{a^2 + r^2 + z^2}{2ar}, \quad (5)$$

где 2α — угол раствора клина; $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \mu)$ — функция конуса [6].

Из условия поведения $L(\alpha, \tau)$ при $\tau \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow \infty$ аппроксимируем ее на полубесконечном интервале выражением

$$L(\alpha, \tau) \approx 2 + \frac{A_0(\alpha)}{\operatorname{ch} \pi\tau}, \quad (6)$$

где

$$A_0 = \pi \frac{4\alpha + \sin 4\alpha}{4\alpha^2 - \sin^2 2\alpha} - 2. \quad (7)$$

Если учесть осциллирующий характер изменения функции конуса на полубесконечном интервале [7], то полученную формулу для осадок клиновидного основания следует признать достаточной для инженерных расчетов.

Тогда, используя значения интегралов [8]

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \beta\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch} \mu) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \mu + \cos \beta)}}, \quad |\beta| \leq \pi,$$

получаем выражение для осадок поверхности упругого клиновидного основания в следующем виде:

$$V_{(r,z)} = \frac{P(1-\nu_0^2)}{\pi E} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{A_0}{2R_2} \right) \quad (8)$$

($R_1 = \sqrt{(a-r)^2 + z^2}$; $R_2 = \sqrt{(a+r)^2 + z^2}$). В формуле (8) первое слагаемое представляет решение Буссинеска [1] для упругого однородного изотропного полупространства.

Построение функции Грина для системы перекрестных балок с заземленной точкой. Определение прогибов Z_{ik} основной системы под действием сосредоточенной вертикальной единичной силы (функция Грина) представляет сложную задачу, не решенную до настоящего времени в общем виде. Ее предлагается приближенно решать следующим образом.

Известно [9], что прогибы прямолинейного стержня с заземлением в начале координат под действием сосредоточенной силы описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{d^4 z}{dx^4} = 0, \quad (9)$$

т. е. кубической параболой. На основании этого для рассматриваемой расчетной системы с учетом кинематических граничных условий в начале координат, принимая во внимание кручение, задаемся функцией Грина в виде тринадцатичленного полинома:

$$Z(x, y) = a_{11} \frac{xy}{ab} + a_{20} \frac{x^2}{a^2} + a_{30} \frac{x^3}{a^3} + a_{21} \frac{x^2 y}{a^2 b} + a_{31} \frac{x^3 y}{a^3 b} + a_{22} \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + a_{32} \frac{x^3 y^2}{a^3 b^2} + a_{02} \frac{y^2}{b^2} + a_{03} \frac{y^3}{b^3} + \\ + a_{12} \frac{xy^2}{ab^2} + a_{13} \frac{xy^3}{ab^3} + a_{23} \frac{x^2 y^3}{a^2 b^3} + a_{33} \frac{x^3 y^3}{a^3 b^3}, \quad (10)$$

где a, b — характерные размеры системы перекрестных балок; a_{ik} — неизвестные коэффициенты.

Постоянные a_{ik} (10) определим методом Ритца [10]. Функционал полной энергии системы перекрестных балок с заземленной точкой под действием единичной силы, приложенной к точке с координатами x_p и y_p , имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} EJ_i \frac{d^2 z(x, y_i)}{dx^2} dx + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \int_0^{l_k} EJ_k \frac{d^2 z(x_k, y)}{dy^2} dy + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^{l_i} GT_i \frac{d^2 z(x, y_i)}{dx dy} dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M \int_0^{l_k} GT_k \frac{d^2 z(x_k, y)}{dx dy} dy - Z(x_p, y_p), \end{aligned} \quad (11)$$

где $l_i, l_k, EJ_i, GT_i, GT_k$ — длины, изгибная и крутильная жесткости стержней, образующих систему перекрестных балок; N, M — число стержней, параллельных осям OX и OY соответственно. В (11) суммирование распространяется по всем стержням системы, параллельным соответствующим осям координат.

После вычисления функционала (11) дифференцированием полученного выражения по каждому из неизвестных a_{ik} получаем систему линейных алгебраических уравнений 13-го порядка, решение которой позволяет определить функцию Грина для системы перекрестных балок с заземленной точкой.

Численные результаты. Вычисление функционала полной энергии (11) и его дифференцирование по каждому из неизвестных коэффициентов a_{ik} производилось в общем виде с помощью пакета компьютерной алгебры Matematika-3 [11]. Была составлена программа расчета системы перекрестных балок на упругом клиновидном основании (рис. 1). Число участков Б. Н. Жемочкина для всей системы составило 201. Размеры поперечного сечения стержней постоянны и равны $2,4 \times 0,4$ м.

Результаты расчета для $E_0 = 20$ МПа; $\nu_0 = 0,3$; $E_b = 20 \cdot 10^3$ МПа и действия на систему равномерно распределенной нагрузки $g = 16,9$ кН/м приведены на рис. 3. Распределение осадок по оси 5 для $2\alpha = \pi$ (полупространство) и $2\alpha = \pi/2$ показано на рис. 3, а, при этом длинная сторона фундамента параллельна ребру клина, находящемуся от края системы на расстоянии 3,55 м.

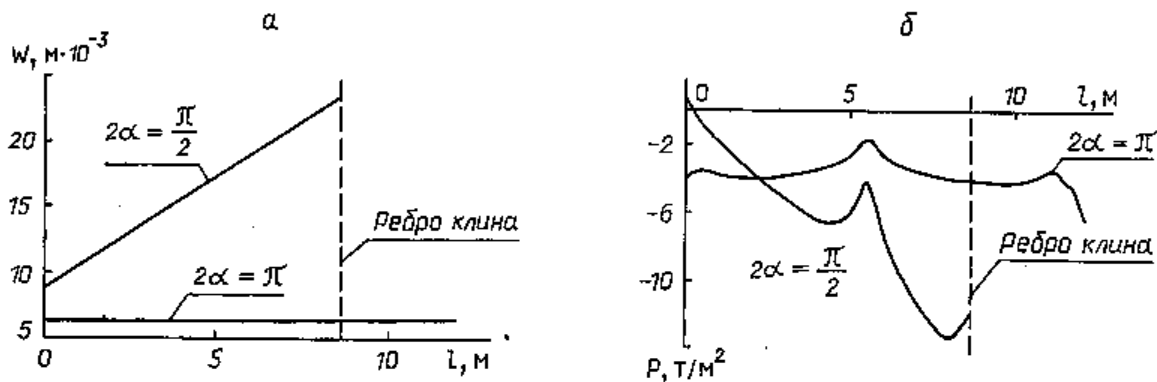


Рис. 3. Распределение осадок (а) и реактивного отпора грунта (б) системы по оси 5 для $2\alpha = \pi$ и $2\alpha = \pi/2$ при $l_k = 3,55$ м

На рис. 3, б показано распределение реактивного грунта системы перекрестных балок по оси 5 для полупространства и для $2\alpha = \pi/2$ при $l_k = 3,55$ м.

Summary

The calculation of the cross beam system on the elastic wedge-shaped foundation is offered to be made by B.N.Zhemochkin's approach. In the Ritz method is used calculation the coefficients of canonical equations of Zhemochkin's approach. The Green function is constructed for the elastic wedge-shaped foundation. An example of calculation is given.

Литература

1. Горбунов - Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. М., 1984.
2. Симвулиди И. А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. М., 1978.
3. СНиП 2.01.09—91 Здания и сооружения на подрабатываемых территориях и просадочных грунтах. М., 1992.
4. Жемочкин Б. Н., Синицин А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М., 1962.
5. Босаков С. В. // МТИ. 1997. Т. 2, № 2. С. 93—95.
6. Босаков С. В., Фомичева Н. М. // ОФиМГ. 1988. № 2. С. 26—28.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в теории упругости. Л., 1968.
9. Федосеев В. Н. Сопротивление материалов. М., 1974.
10. Тимошенко С. П., Войновский - Кригер С. Пластинки и оболочки. М., 1963.
11. Дьяконов В. П. Системы символьной математики. Matematika 2 и Matematika-3. М., 1998.

Могилевский государственный
технический университет

Поступила в редакцию
30.03.2000

После вычисления коэффициентов матрицы жесткости и матрицы масс, а также коэффициентов матрицы демпфирования, составляется матрица системы уравнений $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t)$, где M — матрица масс, C — матрица демпфирования, K — матрица жесткости, u — вектор перемещений, $F(t)$ — вектор нагрузок. Для решения этой системы уравнений используется метод модальных форм. Сначала выполняется модальный анализ, который позволяет разложить исходную систему уравнений на систему независимых уравнений относительно модальных координат. Затем для каждой модальной координаты решается уравнение второго порядка. Результаты расчета для $E = 20 \text{ МПа}$, $\nu = 0,3$, $\rho = 20 \text{ МПа}$ и $\rho = 10 \text{ МПа}$ и $\rho = 10 \text{ МПа}$ и $\rho = 10 \text{ МПа}$ показаны на рис. 3, а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, ц, ч, ш, щ, э, ю, я, а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, ц, ч, ш, щ, э, ю, я.

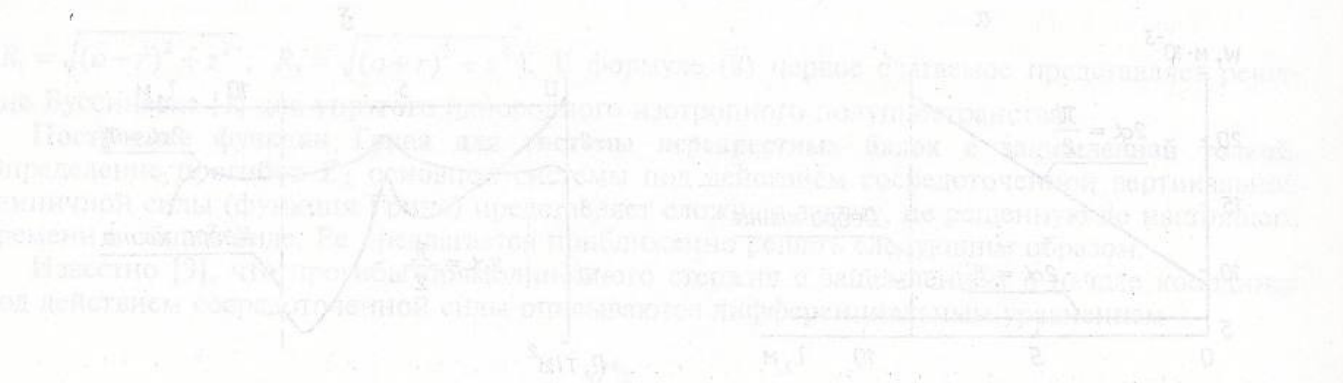


Рис. 3. Зависимость коэффициента динамического усиления от частоты нагрузки для различных значений модуля упругости E и плотности ρ . а, б — $E = 20 \text{ МПа}$, $\rho = 10 \text{ МПа}$; в, г — $E = 20 \text{ МПа}$, $\rho = 20 \text{ МПа}$. а, б — зависимость коэффициента динамического усиления от частоты нагрузки для $E = 20 \text{ МПа}$ и $\rho = 10 \text{ МПа}$; в, г — зависимость коэффициента динамического усиления от частоты нагрузки для $E = 20 \text{ МПа}$ и $\rho = 20 \text{ МПа}$. д, е, ж, з, и, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, ф, ц, ч, ш, щ, э, ю, я — зависимость коэффициента динамического усиления от частоты нагрузки для различных значений E и ρ .