УДК 519.14

К ГИПОТЕЗЕ ХАРТСФИЛД-РИНГЕЛЯ ОБ АНТИМАГИЧНОСТИ СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

В. Н. КАЛАЧЕВ
Институт математики НАН Беларуси
Минск, Беларусь

Введение. *Нумерации на графах* представляют собой расстановки некоторых целых чисел на вершинах и/или ребрах графов. Графы со специальными нумерациями имеют широкое практическое применение. Впервые нумерациями на графах математики заинтересовались около середины 1960-х гг., и с тех пор вышло более 3000 работ, посвященных этой тематике.

В 1990 г. Н. Хартсфилд и Г. Рингель ввели в своей книге [1] понятие *антимагической нумерации* ребер графа – нумерации ребер первыми натуральными числами по порядку, при которой суммы чисел на всех ребрах, инцидентных каждой вершине графа, попарно различны. Графы, для которых существует такая нумерация, также были названы *антимагическими*. Более того, в [1] было высказано предположение, что *все связные графы с не менее чем тремя вершинами являются антимагическими*.

В общем случае эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута, хотя существует много работ, ей посвященных. Такое положение дел свидетельствует о том, что, с одной стороны, рассматриваемая гипотеза интересна специалистам в области графов, а с другой стороны, достаточно сложна, чтобы оставаться недоказанной вот уже более тридцати лет.

Основная часть. В 2010 г. Майкл Баррус [2] доказал, что *связные расщепляемые графы и связные 1-разложимые графы* являются антимагическими. Это была первая попытка применения *теории алгебраической декомпозиции графов* к исследованию гипотезы Хартсфилд-Рингеля. При этом Баррус использовал только простейшую форму декомпозиции, получая, тем не менее, одновременно элегантный и существенный результат. *Теория алгебраической декомпозиции графов* (для краткости, АДГ) была разработана профессором Р.И. Тышкевич и её учениками, в число которых я также имею честь входить. Хотя АДГ изначально создавалась с практическими целями, оказалось, что эта теория также полезна и при исследовании гипотез. Поэтому, когда выяснилось, что наши наработки применимы к гипотезе Хартсфилд-Рингеля, мы и сами взялись за это направление.

Автором настоящего доклада была доказана [3] *антимагичность связных (1,2)-полярных и связных (1,2)-разложимых графов*, являющихся обобщением связных расщепляемых и связных 1-разложимых графов соответственно, а также предприняты попытки дальнейшей модификации используемого метода для еще более общей структуры – *связных (1,q)-полярных и связных (1,q)-разложимых графов при* $q \geq 3$. К сожалению, оказалось [4], что именно при $q = 3$ начинают проявлять себя фундаментальные недостатки избранного подхода, вынуждающие в итоге отказаться от этой идеи.

Заключение. Доказана антимагичность связных (1,2)-полярных и (1,2)-разложимых графов. Построен алгоритм антимагической нумерации таких графов. Показана затруднительность дальнейшего обобщения подобного алгоритма на (1,q)-полярные и (1,q)-разложимые графы при $q \geq 3$. Что, впрочем, еще не свидетельствует о том, что полярные и разложимые графы более высоких порядков неинтересны и бесперспективны с точки зрения гипотезы Хартсфилда-Рингеля вообще.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hartsfield, N.** Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction / N. Hartsfield, G. Ringel. – Academic Press, Inc., Boston, 1990. – 246 p.
2. **Barrus, M.** Antimagic labeling and canonical decomposition of graphs / M. Barrus // Inform. Process. Lett. – 2010. – Vol. 110. – P. 261–263.
3. **Калачев, В. Н.** К гипотезе Хартсфилда–Рингеля: (1,2)-полярные и (1,2)-разложимые графы / В. Н. Калачев // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2014. – № 3. – С. 81–84.
4. **Kalachev, V. N.** On the Antimagic Labeling of (1,q)-polar and (1,q)-decomposable Graphs / V. N. Kalachev // Труды института математики. – 2020. – Т. 28, № 1–2. – С. 98–108.