АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ОДНОМ РАЦИОНАЛЬНОМ ОБЫКНОВЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, Н.С. Березкина, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}(y'-y^2)y^2y'''=(1-1/\nu)y^2(y'')^2+a_1y(y')^2y''+a_2(y')^4+a_3y^3y'y''+\\+a_4y^2(y')^3+a_5y^5y''+a_6y^4(y')^2+a_7y^6y'+a_8y^8,\end{gathered}\tag{1}$$

где y – комплекснозначная функция от z, z – независимая комплексная переменная, $\nu\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Этим уравнением может быть определена одна из компонент квадратичной системы третьего порядка.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$y'=uy^2, (u-1)u''=(1-1/\nu)u'^2-p(u)u'y-q(u)y^2,\tag{2}$$

где $p(u)=(2-a_1+\frac{4}{\nu})u^2-(a_3+6)u-a_5, q(u)=(2-2a_1-a_2+\frac{4}{\nu})u^4-(2a_3+a_4+6)u^3-(2a_5+a_6)u^2-a_7u-a_8$. При $p(1)=q(1)=0$ Пенлеве-анализ уравнения (1) проводился в [1,2]; при $\nu=\infty, p(1)\neq 0$ – в [3,4]; в [5] получены некоторые необходимые условия наличия свойства Пенлеве у уравнения (1). В [6] получены необходимые условия наличия целых резонансов в частном случае, при этом выписаны некоторые уравнения, удовлетворяющие найденным условиям.

Решается задача нахождения необходимых и достаточных условий наличия свойства Пенлеве у уравнения (1) при

$$2-2a_1-a_2+\frac{4}{\nu}=0.\tag{3}$$

Применяя метод малого параметра Пенлеве к системе (2), доказана

Лемма. *Для отсутствия подвижных многозначных особых точек у решений уравнения (1) при условии (3) необходимо* $q(u)\equiv 0$.

Используя метод малого параметра Пенлеве и результаты Пенлеве-анализа рациональных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков, доказана

Теорема. *Для наличия свойства Пенлеве у уравнения (1) при условии (3) необходимо и достаточно,чтобы оно имело вид*

$$\begin{gathered}(y'-y^2)y^2y'''=(1-\tfrac{1}{\nu})y^2(y'')^2+(2-\mu+\tfrac{4}{\nu})y(y')^2y''+\\+2(\mu-1-\tfrac{2}{\nu})y'^4+(\mu-6)y^3y'y''+2(3-\mu)y^2(y')^3,\end{gathered}$$

где пара (ν,μ) *принимает один из следующих видов:* $(\nu,0)$, $\nu\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}$; $(1,1)$; $(1,2)$; $(1,3)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(3,1)$.

Литература

1. Мартынов И. П. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 764–771.
2. Мартынов И. П. *Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 6. С. 937–946.
3. Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 9. С. 1640–1641.
4. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Аналитические свойства решений одного класса уравнений третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1219–1224.
5. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных многозначных особых точек.* В сб. матер. Респ. науч.-практ. конф., посвящ. 450-летию со дня рождения Г. Галилея, (17–18 апреля 2014 г., Брест, Беларусь). (Под общ. ред. Н.Н. Сендера) Брест: БрГУ. 2014. С. 11–13.
6. Adjabi Y., Jrad F., Kessi A., Mugan U. *Third order differential equations with fixed critical points* Stud. Appl. Math. 2009. Vol. 208. № 1. P. 238–248.

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ РЕЗОНАНСАМИ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, И.П. Мартынов, М.В. Мисник

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$(y' - y^2)y''' = (1 - 1/\nu)(y'')^2 - 2yy'y'', \tag{1}$$

где y – комплекснозначная функция от z, z – независимая комплексная переменная, $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Этим уравнением может быть определена одна из компонент квадратичной системы третьего порядка.

Найдем необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у уравнения (1), укажем в каких функциях выражается решение полученного уравнения. Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$y = -\frac{1 + \frac{2}{\nu}}{z - z_0} + ... + h_r(z - z_0)^{r-1} + ...,$$

где z_0, h_r – произвольные постоянные, тогда уравнение для определения r примет вид

$$(r + 1)(r^2 - (\nu + 3)r - \nu - 2) = 0. \tag{2}$$

Для наличия свойства Пенлеве у уравнения (1) будем требовать, чтобы корни уравнения (2) были целыми, различными, отличными от 0 [1,2]. Это требование выполнено только при $\nu = -8$. В этом случае первый интеграл уравнения (1) имеет вид

$$y'' = -\frac{8}{z - K}(y' - y^2), \tag{3}$$

где K – произвольная постоянная. В (3) положим $y = -\frac{3}{4}t^3u(t) + \frac{3}{4}t$, где $t = -\frac{1}{z-K}$, тогда для $u(t)$ получим уравнение

$$\ddot{u} = 6u^2, \tag{4}$$

где $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$. Запишем первый интеграл уравнения (4): $\dot{u}^2 = 4u^3 + C$, где C – произвольная постоянная. Таким образом, доказана