Литература

1. Можджер Г. Т. *Первые интегралы одного класса дифференциальных уравнений высших порядков с рациональной правой частью* : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01. Гродно, 2006.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. А. Мухин, И.П. Мартынов, В. А. Пронько

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$y^2y'y''' = ay^2(y'')^2 + by(y')^2y'' + c(y')^4 + ly(y')^3,$$

где $a, b, c, l \in \mathbb{C}$, $l \neq 0$, $y = y(z)$.

Масштабным преобразованием аргумента сделаем $l = 2$. Будем иметь

$$y^2y'y''' = ay^2(y'')^2 + by(y')^2y'' + c(y')^4 + 2y(y')^3. \tag{1}$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (1) не имеет полярных решений. В этом случае необходимо выполнение условий

$$a + b + c = 1,\ 2a + b = 3. \tag{2}$$

Учитывая (2), перепишем уравнение (1):

$$y^2y'y''' = ay^2(y'')^2 + (3-2a)y(y')^2y'' + (a-2)(y')^4 + 2y(y')^3. \tag{3}$$

Легко проверить, что если $a \neq \frac{3}{2}$, то уравнение (3) имеет двухпараметрическое решение

$$y = Ce^{\frac{2a-3}{z-z_0}}, \forall z_0, C. \tag{4}$$

Лемма 1. *Уравнение (3) при $a \neq \frac{3}{2}$ имеет решение с подвижной существенно особой точкой.*

Лемма 2. *Уравнение (3) при $a \neq \frac{3}{2}$ имеет первый интеграл*

$$\left(\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2}\right)^2 + \frac{4}{2a-3}\left(\frac{y'}{y}\right)^3 = h\left(\frac{y'}{y}\right)^{2a},\ \forall h \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Замечание 1. Функция (4) удовлетворяет уравнению (5) при $h = 0$.

Замечание 2. При $a = 2$ уравнение (3) имеет общее решение

$$y = C\left(1 + \frac{C_2 - C_1}{z - C_2}\right)^{\frac{1}{C_2 - C_1}},\ \forall C, C_1, C_2, C_1 \neq C_2.$$

Пусть $a = \frac{3}{2}$. Верна

Лемма 3. *Уравнение (3) при $a = \frac{3}{2}$ имеет первый интеграл*

$$\left(\frac{y''}{y} - \frac{(y')^2}{y^2}\right)^2 = 4\left(\frac{y'}{y}\right)^3\left(ln\left(\frac{y'}{y}\right) + H\right),\ \forall H \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Полагая $y' = wy$, при $a = \frac{3}{2}$ из (3) получим

$$ww'' = \frac{3}{2}(w')^2 + 2w^3. \tag{7}$$

Используя (6), найдем, что уравнение (7) будет иметь первый интеграл $(w')^2 = 4w^3(lnw + H)$.

Согласно [1, с. 47], уравнение (7) можно назвать барьерным, так как с одной стороны уравнение (7) должно иметь решение с полюсом второго порядка $w = \beta(z - z_0)^{-2}$, однако эта функция уравнению (7) не удовлетворяет. Как и в работе [1, с. 47], к уравнению (7) применим преобразование

$$z - z_0 = e^{\frac{x}{\gamma}},\ w = \gamma^2 e^{-\frac{2x}{\gamma}} u,\ u = u(x). \tag{8}$$

При этом получим

$$w' = \gamma^2 e^{-\frac{3x}{\gamma}}(\gamma\dot{u} - 2u), w'' = \gamma^2 e^{-\frac{4x}{\gamma}}(\gamma^2\ddot{u} - 5\gamma\dot{u} + 6u), \tag{9}$$

где $\dot{u} = \frac{du}{dx},\ \ddot{u} = \frac{d^2u}{dx^2}$.

С учетом (9) из (7) получим

$$\gamma\left(u\ddot{u} - \frac{3}{2}(\dot{u})^2\right) + u\dot{u} = 2\gamma u^3. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) согласно [1, с. 48] будем искать в виде ряда $u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k\gamma^k$.

Тогда, из (10) получим, что $\dot{u}_1 = 2$. Значит, будем иметь $u_1 = 2x$. Так как $x = \gamma ln(z - z_0)$, то получим, что функция $u = u(z)$ будет иметь подвижные логарифмические точки ветвления.

Значит, верна

Теорема 1. *Решения уравнения (3) при $a \neq \frac{3}{2}$ имеют подвижные существенно особые точки, а при $a = \frac{3}{2}$ имеют подвижные логарифмические точки ветвления.*

Литература

1. Соболевский С. Л. *Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений* / С. Л. Соболевский. Минск: БГУ. 2006.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Л.А. Хвощинская

Рассматривается следующая задача. Найти систему двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$, которая при обходе вокруг особых точек a_k, $k = 1, ..., n+1$, $a_{n+1} = \infty$ умножается на постоянные невырожденные $2{\times}2$ матрицы V_k, $k = 1, ..., n+1$, $V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_{n+1} = E$ (см.[1]). Наша цель – построить дифференциальное уравнение класса Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y\sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{z - a_k}, \tag{1}$$