Полагая $y' = wy$, при $a = \frac{3}{2}$ из (3) получим

$$ww'' = \frac{3}{2}(w')^2 + 2w^3. \tag{7}$$

Используя (6), найдем, что уравнение (7) будет иметь первый интеграл $(w')^2 = 4w^3(lnw + H)$.

Согласно [1, с. 47], уравнение (7) можно назвать барьерным, так как с одной стороны уравнение (7) должно иметь решение с полюсом второго порядка $w = \beta(z - z_0)^{-2}$, однако эта функция уравнению (7) не удовлетворяет. Как и в работе [1, с. 47], к уравнению (7) применим преобразование

$$z - z_0 = e^{\frac{x}{\gamma}},\ w = \gamma^2 e^{-\frac{2x}{\gamma}} u,\ u = u(x). \tag{8}$$

При этом получим

$$w' = \gamma^2 e^{-\frac{3x}{\gamma}}(\gamma\dot{u} - 2u), w'' = \gamma^2 e^{-\frac{4x}{\gamma}}(\gamma^2\ddot{u} - 5\gamma\dot{u} + 6u), \tag{9}$$

где $\dot{u} = \frac{du}{dx},\ \ddot{u} = \frac{d^2u}{dx^2}$.

С учетом (9) из (7) получим

$$\gamma\left(u\ddot{u} - \frac{3}{2}(\dot{u})^2\right) + u\dot{u} = 2\gamma u^3. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) согласно [1, с. 48] будем искать в виде ряда $u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k\gamma^k$.

Тогда, из (10) получим, что $\dot{u}_1 = 2$. Значит, будем иметь $u_1 = 2x$. Так как $x = \gamma ln(z - z_0)$, то получим, что функция $u = u(z)$ будет иметь подвижные логарифмические точки ветвления.

Значит, верна

Теорема 1. *Решения уравнения (3) при $a \neq \frac{3}{2}$ имеют подвижные существенно особые точки, а при $a = \frac{3}{2}$ имеют подвижные логарифмические точки ветвления.*

Литература

1. Соболевский С. Л. *Подвижные особые точки решений обыкновенных дифференциальных уравнений* / С. Л. Соболевский. Минск: БГУ. 2006.

ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Л.А. Хвощинская

Рассматривается следующая задача. Найти систему двух функций $Y(z) = (y_1, y_2)$, которая при обходе вокруг особых точек a_k, $k = 1, ..., n+1$, $a_{n+1} = \infty$ умножается на постоянные невырожденные 2×2 матрицы V_k, $k = 1, ..., n+1$, $V_1 \cdot V_2 \cdot \ldots \cdot V_{n+1} = E$ (см.[1]). Наша цель – построить дифференциальное уравнение класса Фукса

$$\frac{dY}{dz} = Y\sum_{k=1}^{n}\frac{U_k}{z - a_k}, \tag{1}$$

где U_k – постоянные 2×2 матрицы (матрицы-вычеты), причем $U_k \sim \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k = 1,\dots,n$. При построении применялся «метод логарифмизации» произведения матриц второго порядка [2].

Обозначим характеристические числа матриц V_k – α_k, β_k, матриц $V_1\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_k$ – α_k^*, β_k^*, матриц $V_k\cdot V_{k+1}\cdot\ldots\cdot V_n$ – α_k^{**}, β_k^{**}, соответственно, и найдем числа $\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$, $\rho_k^* = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k^*$, $\sigma_k^* = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k^*$, $\rho_k^{**} = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k^{**}$, $\sigma_k^{**} = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k^{**}$, $\sum_{k=1}^{n+1}(\rho_k+\sigma_k) = 1$, $0\leqslant \mathrm{Re}\,(\sigma_{\mathrm{n+1}}-\rho_{\mathrm{n+1}}) < 1$, $(\rho_k^*+\sigma_k^*) = \sum_{m=1}^{k}(\rho_m+\sigma_m)$, $(\rho_k^{**}+\sigma_k^{**}) = \sum_{m=k}^{n}(\rho_m+\sigma_m)$, $d_k^* = \rho_k^*\sigma_k^*$, $d_k^{**} = \rho_k^{**}\sigma_k^{**}$. Установлено, что матрица $U_1+U_2+\ldots+U_n$ подобна матрице $S = \begin{pmatrix} -\rho_{n+1} & 0 \\ 0 & 1-\sigma_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix}$. В работе [2] доказано, что в случае $n=2$ матрица S представима в виде суммы матриц

$$S = \begin{pmatrix}\rho & 0\\ 0 & \sigma\end{pmatrix} = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} s_1 & \gamma_1/c\\ c & s_1'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -\gamma_1/c\\ -c & s_2'\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $s_1 = \frac{\rho_1\sigma_1-(\rho-\rho_2)(\rho-\sigma_2)}{\sigma-\rho}$, $s_1' = \frac{(\sigma-\rho_2)(\sigma-\sigma_2)-\rho_1\sigma_1}{\sigma-\rho}$, $s_2 = \frac{\rho_2\sigma_2-(\rho-\rho_1)(\rho-\sigma_1)}{\sigma-\rho}$, $s_2' = \frac{(\sigma-\rho_1)(\sigma-\sigma_1)-\rho_2\sigma_2}{\sigma-\rho}$, $\gamma_1 = -(s_1-\rho_1)(s_1-\sigma_1)$, c – произвольная постоянная. Так как матрицы $S_k \sim \frac{1}{2\pi i}V_k$, $k=1,2$, то они представляют собой матрицы-вычеты уравнения (1) при $n=2$.

В случае произвольного n представляем матрицу S в виде суммы n матриц $S = \sum_{k=1}^{n} S_k$, где $S_k \sim \frac{1}{2\pi i}V_k$, $k=1,\dots,n$. Для этого записываем матрицу V_{n+1}^{-1} $(n-2)$ способами в виде произведений двух матриц $V_{n+1}^{-1} = (V_1\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_k)\cdot(V_{k+1}\cdot\ldots\cdot V_n)$, $k=1,\dots,n-2$, к каждому из которых применяем формулу (2). В результате получаем систему $(n-2)$ представлений матрицы S:

$$S = \sum_{k=1}^{n} S_k = S_1^* + S_2^{**} = S_2^* + S_3^{**} = \ldots = S_k^* + S_{k+1}^{**} = \ldots = S_{n-1}^* + S_n^{**}, \tag{3}$$

где матрицы $S_k^* \sim \frac{1}{2\pi i}\ln(V_1\cdot V_2\cdot\ldots\cdot V_k)$, $S_k^{**} \sim \frac{1}{2\pi i}\ln(V_k\cdot\ldots\cdot V_n)$ и содержат n различных произвольных постоянных c_k. Из системы (3) последовательно находим матрицы $S_1 = S_1^*$, $S_k = S_k^* - S_{k-1}^* = S_k^{**} - S_{k+1}^{**}$, $k=2,\dots,n-1$, $S_n = S_n^{**}$. Связь между постоянными c_k и c_{k+1} устанавливаем на основании формулы $\det S_k = d_k$, $k=1,\dots,n-1$. Таким образом была доказана теорема.

Теорема. *Решение проблемы Римана для двух функций* $Y(z) = (y_1,y_2)$ *с* $(n+1)$ *особыми точками* a_1, $a_2,\ldots a_n$, $a_{n+1} = \infty$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению класса Фукса* $\frac{dY}{dz} = Y\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{S_k}{z-a_k}$, *элементы матриц-вычетов* $S_k = \begin{pmatrix} s_k & \gamma_k/c_k\\ c_k & s_k'\end{pmatrix}$ *которых находятся по формулам* $s_k = \frac{1}{\sigma-\rho}\left[d_k^* - d_{k-1}^* - \rho(\rho_k+\sigma_k) + d_k^{**} - d_{k+1}^{**}\right]$, $s_k' = \frac{1}{\sigma-\rho}\left[d_{k-1}^* - d_k^* + \sigma(\rho_k+\sigma_k) + d_{k+1}^{**} - d_k^{**}\right]$, $c_k = c\tau_1\tau_2\cdot\ldots\cdot\tau_{n-3}(\tau_{n-2}-1)$, $\gamma_k = -(s_k-\rho_k)(s_k-\sigma_k)$, $\tau_k^2\gamma_k^* + \tau_k\left(\gamma_{k+1}^* + \gamma_k^* - \gamma_k\right) + \gamma_{k+1}^* = 0$, $k=1,\dots,n-2$, c *– произвольная постоянная.*

Литература

1. Еругин Н. П. *Проблема Римана.* Минск: Наука и техника, 1982.

2. Khvoshchinskaya L., Rogosin S. *On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions* // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018 (M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers, 2020. P. 79–112.