

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.В. Цегельник

Решения системы дифференциальных уравнений

$$y = -w + \varphi(t) + \frac{[w' + (b-1)\varphi'(t)]^2}{2w^2}, \quad (1.1)$$

$$w = -y + \varphi(t) + \frac{[y' + b\varphi'(t)]^2}{2y^2} \quad (1.2)$$

с неизвестными функциями y , w независимой переменной t , произвольной аналитической функцией $\varphi(t)$ и параметром b подчинены одному из условий:

либо

$$[w' + (b-1)\varphi'(t)]y + [y' - b\varphi'(t)]w = 0, \quad (2)$$

либо

$$[w' + (b-1)\varphi'(t)]y - [y' - b\varphi'(t)]w = 0. \quad (3)$$

При выполнении условия (2) система (1) эквивалентна по y ($y' - b\varphi'(t) \neq 0$) уравнению

$$2yy'' = y'^2 + 4y^3 - 2\varphi y^2 + 2b\varphi''y - b^2\varphi'^2, \quad (4)$$

а по w ($w' + (b-1)\varphi'(t) \neq 0$) — уравнению

$$2ww'' = w'^2 + 4w^3 - 2\varphi w^2 - 2(b-1)\varphi''w - (b-1)^2\varphi'^2. \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть $y_b = y(b, t) \neq 0$ — решение уравнения (4) при фиксированном значении параметра b . Тогда функция w , определяемая (1.2), является решением уравнения (5).

Легко видеть, что уравнение (4) получается из (5) заменой $w \rightarrow y$, $b \rightarrow 1 - b$.

Теорема 2. Пусть $w_{b-1} = w(b-1, t) \neq 0$ — решение уравнения (5) при фиксированном значении параметра b . Тогда функция y , определяемая (1.1), является решением уравнения (4).

При выполнении условия (3) система (1) эквивалентна по y ($y' - b\varphi' \neq 0$) уравнению

$$2yy'' = 3y'^2 - 4b\varphi'y' + 2\varphi y^2 + 2by\varphi'' + b^2\varphi'^2, \quad (6)$$

а по w ($w' + (b-1)\varphi' \neq 0$) — уравнению

$$2ww'' = 3w'^2 + 4(b-1)\varphi'w' + 2\varphi w^2 - 2(b-1)w\varphi'' + (b-1)^2\varphi'^2. \quad (7)$$

Теорема 3. Пусть $y_b = y(b, t) \neq 0$ — решение уравнения (6) при фиксированном значении параметра b . Тогда функция w , определяемая (1.2), является решением уравнения (7).

Теорема 4. Пусть $w_{b-1} = w(b-1, t) \neq 0$ — решение уравнения (7) при фиксированном значении параметра b . Тогда функция y , определяемая (1.1), является решением уравнения (6).

Уравнение (6) получается из (7) заменой $w \rightarrow y$, $b \rightarrow 1 - b$.

Пусть $\varphi(t) = c = \text{const}$. Тогда уравнения (4), (6) принимают соответственно вид

$$2yy'' = y'^2 + 4y^3 - 2cy^2, \quad (8)$$

$$2yy'' = 3y'^2 + 2cy^2. \quad (9)$$

Уравнение (8) имеет первый интеграл

$$y'^2 - 2y^3 + 2cy^2 = Hy, \quad (10)$$

где H — произвольная постоянная. Уравнение (10) интегрируется в эллиптических функциях [1].

Уравнение (9) заменой

$$y = p^{-2}(t) \quad (11)$$

сводится к линейному $p'' = -\frac{c}{2}p$.

Таким образом, доказана

Теорема 5. Уравнения (4), (6) при $\varphi(t) = c - \text{const}$ являются уравнениями Пенлеве-типа.

Отметим, что уравнение (4) при $\varphi(t) = t$ есть уравнение XXXIV из списка [2].

Теорема 6. Уравнение (6) при $b = 0$ либо при $\varphi(t) = t$ является уравнением Пенлеве-типа.

Доказательство. Если в (6) $b = 0$, то преобразованием (11) оно сводится к уравнению Эйри $p'' = -\frac{c}{2}p$. При $\varphi(t) = t$ уравнение (6) принимает вид

$$2yy'' = 3y'^2 - 4by' + 2ty^2 + b^2. \quad (12)$$

Пусть $b \neq 0$. Заменой $y \rightarrow by^{-1}$ от уравнения (12) перейдем к уравнению

$$2yy'' = y'^2 - 4y^2y' - y^4 - 2ty^2. \quad (13)$$

Наряду с (13) рассмотрим более общее уравнение

$$2vv'' = v'^2 - 4v^2v' - v^4 + 2F(t)v^2 - \gamma, \quad (14)$$

в котором $F(t)$ — произвольная аналитическая функция; γ — параметр. Уравнение (13) с точностью до обозначения совпадает с (14) при $F(t) = -t$, $\gamma = 0$.

Используя подход в [2], в [3] показано, что уравнение (14) является уравнением Пенлеве-типа. А именно, общее решение уравнения (14) есть рациональная функция постоянных интегрирования. Теорема доказана.

Замечание. Уравнение (14) в случае $\gamma = 1$ есть XXVII каноническое уравнение в списке [2]. Преобразование Беклунда для уравнения (14) в случае $F(t) = 2(t^2 + \alpha)$, $\gamma = -2\beta$ (α, β — произвольные параметры) получено в [4].

Следствие. Уравнение (4) при $\varphi''(t) \neq 0$, а уравнение (6) при $b \neq 0$, $\varphi''(t) \neq 0$ не являются уравнениями Пенлеве-типа.

Литература

1. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. М: Наука, 1971.
2. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. Харьков: ОНТИ, 1939.
3. Цегельник В.В. О свойствах решений двух дифференциальных уравнений второго порядка со свойством Пенлеве. // Теоретическая и математическая физика. 2021. Т. 206. № 3. С. 361–367.
4. Цегельник В.В. *Некоторые аналитические свойства и приложения решений уравнений Пенлеве-типа*. Минск: Издательский центр БГУ, 2007.