АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КЛАССА ПОЧТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО ДИХОТОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.А. Барабанов, Е.Б. Бекряева

Для натурального n через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0,$$

матрицы коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$ которых кусочно-непрерывны и ограничены на временно́й полуоси $t \geqslant 0$.

Эффективность понятия экспоненциальной дихотомии в исследовании асимптотики решений нелинейных дифференциальных систем, первое приближение которых экспоненциально дихотомично, и в его приложениях к динамическим системам послужило причиной многообразных обобщений этого понятия как внутри самой теории линейных дифференциальных систем, так и за её пределами – в теории эволюционных операторов и в теории линейных расширений динамических систем. Два таких обобщения рассмотрены в работе [1], в которой введены классы слабо экспоненциально дихотомических и почти экспоненциально дихотомических систем – эти классы задаются следующими двумя определениями.

Определение 1. Систему из $\mathcal{M}_n$ назовём *слабо экспоненциально дихотомической на полуоси*, если существуют такие положительные постоянные ν_1 и ν_2 и такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+ (причём, случай нулевой размерности одного из подпространств не исключается), что для её решений $x(\cdot)$ выполнены два условия:

$1'$) если $x(0) \in L_-$, то $\|x(t)\| \leqslant c_1(x)e^{-\nu_1(t-\tau)}\|x(\tau)\|$ для любых $t \geqslant \tau \geqslant 0$,

$2'$) если $x(0) \in L_+$, то $\|x(t)\| \geqslant c_2(x)e^{\nu_2(t-\tau)}\|x(\tau)\|$ для любых $t \geqslant \tau \geqslant 0$,

где $c_1(x)$ и $c_2(x)$ – положительные постоянные, зависящие, вообще говоря, от выбора решения $x(\cdot)$ (что и отражено в их обозначении).

Определение 2. Систему из $\mathcal{M}_n$ назовём *почти экспоненциально дихотомической на полуоси*, если существуют такие положительные постоянные c_1, c_2 и ν_1, ν_2 и такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+ (причём, случай нулевой размерности одного из подпространств не исключается), что для её решений $x(\cdot)$ выполнены два условия:

$1''$) если $x(0) \in L_-$, то $\|x(t)\| \leqslant c_1 e^{-\nu_1(t-\tau)}\|x(\tau)\|$ для любых $t \geqslant \tau \geqslant t_x$,

$2''$) если $x(0) \in L_+$, то $\|x(t)\| \geqslant c_2 e^{\nu_2(t-\tau)}\|x(\tau)\|$ для любых $t \geqslant \tau \geqslant t_x$,

где t_x – неотрицательное число, зависящее, вообще говоря, от выбора решения $x(\cdot)$ (что и отражено в обозначении).

Если в определении 1 величины $c_1(x)$ и $c_2(x)$ считать одними и теми же для всех решений с начальными данными из пространств L_- и L_+ соответственно, т.е. $c_1(x) = c_1 = \mathrm{const}$ и $c_2(x) = c_2 = \mathrm{const}$, то придём к определению класса $\mathcal{E}_n$ экспоненциально дихотомических на полуоси n-мерных систем. Таким образом, определение слабо экспоненциально дихотомических систем отличается от определения экспоненциально дихотомических систем только отказом от требования равномерности оценок по соответствующим постоянным-множителям.

Точно так же, если в определении 2 величины t_x считать равными нулю для всех решений из соответствующих подпространств, то, опять же, получим определение класса $\mathcal{E}_n$ экспоненциально дихотомических на полуоси n-мерных систем. Хотя условия $1''$) и $2''$) и означают равномерность оценок по постоянным-множителям c_1 и c_2, но не при всех $t \geqslant 0$ (как в случае экспоненциально дихотомических систем), а только при t, больших некоторого t_x, своего для каждого решения $x(\cdot)$.

Класс n-мерных слабо экспоненциально дихотомических систем обозначим через $W\mathcal{E}_n$, класс n-мерных почти экспоненциально дихотомических систем – через $A\mathcal{E}_n$.

Очевидны равенства $\mathcal{E}_1 = A\mathcal{E}_1 = W\mathcal{E}_1$. В работе [1] доказано, что для каждого $n \geqslant 2$ имеют место собственные включения $\mathcal{E}_n \subset A\mathcal{E}_n \subset W\mathcal{E}_n$. Кроме того, в работе [1] получена следующая характеризация класса $W\mathcal{E}_n$: система $A \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда принадлежит классу $W\mathcal{E}_n$, когда существует такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+, что

$$\sup_{x(0)\in L_-\setminus\{\mathbf{0}\}} \varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} < 0 \quad \text{и} \quad \inf_{x(0)\in L_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} > 0. \qquad (1)$$

Для сравнения приведём аналогичную характеризацию класса $\mathcal{E}_n$. Как вытекает из [2, с. 236, лемма 3.1], справедливо следующее утверждение: система $A \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{E}_n$, когда существует такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+, что

$$\varlimsup_{t-\tau\to+\infty} \sup_{x(0)\in L_-\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} < 0 \quad \text{и} \quad \varliminf_{t-\tau\to+\infty} \inf_{x(0)\in L_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} > 0. \qquad (2)$$

Сопоставляя между собой условия (1) и (2), видим, что определения классов $W\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_n$ отличаются друг от друга только порядком выполнения соответствующих предельных операций. Отметим, что, как следует из [3], в (1), в отличие от (2), нельзя заменить $\sup$ и $\inf$ на $\max$ и $\min$ соответственно.

Соотношения (1) и (2) дают определения классов $W\mathcal{E}_n$ и $\mathcal{E}_n$ на языке соответствующих числовых характеристик. Аналогичную характеризацию класса $A\mathcal{E}_n$ даёт следующая

Теорема. *Система $A \in \mathcal{M}_n$ тогда и только тогда принадлежит классу $A\mathcal{E}_n$, когда существует такое разложение $\mathbb{R}^n = L_- \oplus L_+$ пространства $\mathbb{R}^n$ начальных (при $t = 0$) векторов в прямую сумму подпространств L_- и L_+, что выполняются неравенства*

$$\begin{gathered}\lim_{T\to+\infty} \sup_{x(0)\in L_-\setminus\{\mathbf{0}\}} \lim_{\delta\to+\infty} \sup_{\tau\geqslant\delta} \sup_{t-\tau\geqslant T} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} < 0,\\ \lim_{T\to+\infty} \inf_{x(0)\in L_+\setminus\{\mathbf{0}\}} \lim_{\delta\to+\infty} \inf_{\tau\geqslant\delta} \inf_{t-\tau\geqslant T} \frac{1}{t-\tau}\ln\frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} > 0.\end{gathered} \qquad (3)$$

Чтобы сравнить условия (3) с условиями (1) и (2), достаточно заметить, что имеют место [4, с. 223] равенства $\varlimsup\limits_{t-\tau\to+\infty} = \lim\limits_{T\to+\infty} \sup\limits_{t-\tau\geqslant T}$ и $\varliminf\limits_{t-\tau\to+\infty} = \lim\limits_{T\to+\infty} \inf\limits_{t-\tau\geqslant T}$. Отметим, что участвующие в каждом из неравенств (3) две последовательные предельные операции с δ (их аналогично сказанному выше можно, согласно [4, с. 223], заменить одной операцией $\varlimsup\limits_{\tau\to+\infty}$ в первом неравенстве и $\varliminf\limits_{\tau\to+\infty}$ во втором) опустить нельзя, поскольку, если их опустить, то тогда, переставляя местами два последовательных $\sup$ в первом неравенстве и два последовательных $\inf$ во втором (что всегда можно сделать, не изменяя содержание выражения), придём к неравенствам (2), но это противоречит тому, что включение $\mathcal{E}_n \subset A\mathcal{E}_n$ собственное.

Литература

1. Барабанов Е. А., Бекряева Е. Б. *О двух не предполагающих равномерности оценок норм решений обобщениях класса экспоненциально дихотомических на временно́й полуоси линейных дифференциальных систем. I* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 16–30.

2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

3. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1665–1676.

4. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.–Л.: ОНТИ, 1937.

СИМВОЛ ПОЛНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТ НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛЯПУНОВА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ КАК ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ ПАРАМЕТРА

Е.А. Барабанов, В.В. Быков

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, с которой мы далее отождествляем саму систему (1). Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ через $\sigma_{\text{л}}(A)$ обозначим её коэффициент неправильности Ляпунова [1, с. 38; 2, с. 19], т.е. величину, определяемую равенством $\sigma_{\text{л}}(A) \overset{\text{def}}{=} \lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A) - \varliminf\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t \mathrm{Tr}A(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, где $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ – показатели Ляпунова системы (1), а Tr – след матрицы. Следуя [3], назовём *символом полной экспоненциальной неустойчивости* системы $A \in \mathcal{M}_n$ величину

$$\mathrm{ti}(A) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_1(A) \geq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_1(A) < 0. \end{cases}$$

Содержательный смысл функции $\mathrm{ti}\colon \mathcal{M}_n \to \{0, 1\}$ очевиден: она является характеристической функцией множества тех систем из $\mathcal{M}_n$, у линейного пространства решений которых нет подпространств ненулевой размерности, решения которых стремятся к нулю на бесконечности экспоненциально.

Коэффициент неправильности Ляпунова неотрицателен и обращается в нуль только на правильных по Ляпунову системах [1, с. 349] (класс правильных систем (1) обозначим через $\mathcal{R}_n$). С помощью коэффициента $\sigma_{\text{л}}(A)$ формулируются, в частности, достаточные условия, характеризующие реакцию системы $A \in \mathcal{M}_n$ как на её линейные экспоненциально убывающие возмущения [4], так и на её нелинейные возмущения высшего порядка малости [2, с. 275].