операцией $\varlimsup\limits_{\tau\to+\infty}$ в первом неравенстве и $\varliminf\limits_{\tau\to+\infty}$ во втором) опустить нельзя, поскольку, если их опустить, то тогда, переставляя местами два последовательных sup в первом неравенстве и два последовательных inf во втором (что всегда можно сделать, не изменяя содержание выражения), придём к неравенствам (2), но это противоречит тому, что включение $\mathcal{E}_n \subset A\mathcal{E}_n$ собственное.

Литература

1. Барабанов Е. А., Бекряева Е. Б. *О двух не предполагающих равномерности оценок норм решений обобщениях класса экспоненциально дихотомических на временно́й полуоси линейных дифференциальных систем. I* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 16–30.

2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

3. Барабанов Е. А., Конюх А. В. *Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1665–1676.

4. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М.–Л.: ОНТИ, 1937.

СИМВОЛ ПОЛНОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТ НЕПРАВИЛЬНОСТИ ЛЯПУНОВА ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ КАК ВЕКТОР-ФУНКЦИЯ ПАРАМЕТРА

Е.А. Барабанов, В.В. Быков

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{M}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, с которой мы далее отождествляем саму систему (1). Для системы $A \in \mathcal{M}_n$ через $\sigma_{\text{л}}(A)$ обозначим её коэффициент неправильности Ляпунова [1, с. 38; 2, с. 19], т.е. величину, определяемую равенством $\sigma_{\text{л}}(A) \overset{\text{def}}{=} \lambda_1(A) + \ldots + \lambda_n(A) - \varliminf\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t \operatorname{Tr}A(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, где $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$ – показатели Ляпунова системы (1), а Tr – след матрицы. Следуя [3], назовём *символом полной экспоненциальной неустойчивости* системы $A \in \mathcal{M}_n$ величину

$$\operatorname{ti}(A) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_1(A) \geq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda_1(A) < 0. \end{cases}$$

Содержательный смысл функции $\operatorname{ti}\colon \mathcal{M}_n \to \{0, 1\}$ очевиден: она является характеристической функцией множества тех систем из $\mathcal{M}_n$, у линейного пространства решений которых нет подпространств ненулевой размерности, решения которых стремятся к нулю на бесконечности экспоненциально.

Коэффициент неправильности Ляпунова неотрицателен и обращается в нуль только на правильных по Ляпунову системах [1, с. 349] (класс правильных систем (1) обозначим через $\mathcal{R}_n$). С помощью коэффициента $\sigma_{\text{л}}(A)$ формулируются, в частности, достаточные условия, характеризующие реакцию системы $A \in \mathcal{M}_n$ как на её линейные экспоненциально убывающие возмущения [4], так и на её нелинейные возмущения высшего порядка малости [2, с. 275].

Для заданного метрического пространства M рассмотрим параметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t,\mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in M, \tag{2}$$

для которого при каждом фиксированном $\mu \in M$ система (2) принадлежит классу $\mathcal{M}_n$; обозначим её коэффициент неправильности Ляпунова и символ полной экспоненциальной неустойчивости через $\sigma_{\text{л}}(\mu;\mathcal{A})$ и $\mathrm{ti}(\mu;\mathcal{A})$. В частности, определены функции $\sigma_{\text{л}}(\cdot\,;\mathcal{A})\colon M \to \mathbb{R}$ и $\mathrm{ti}(\cdot\,;\mathcal{A})\colon M \to \{0,1\}$, которые назовём соответственно *коэффициентом неправильности Ляпунова* и *символом полной экспоненциальной неустойчивости* семейства (2).

Считаем, что зависимость семейства (2) от параметра μ такова, что сходимость последовательности $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ к точке μ_0 влечёт за собой равномерную на временно́й полуоси сходимость матричнозначной последовательности $\big(\mathcal{A}(t,\mu_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ к матрице $\mathcal{A}(t,\mu_0)$. Класс таких семейств (2) обозначим через $\mathcal{U}^n(M)$. Равносильным образом его можно было бы определить так. Введём на пространстве систем $\mathcal{M}_n$ метрику $\mathrm{dist}_{\mathrm{u}}$ равномерной сходимости на временно́й полуоси: $\mathrm{dist}_{\mathrm{u}}(A,B) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|A(t)-B(t)\|$ для всех $A,B \in \mathcal{M}_n$. Тогда класс $\mathcal{U}^n(M)$ состоит из всех непрерывных отображений метрического пространства M в метрическое пространство $(\mathcal{M}_n, \mathrm{dist}_{\mathrm{u}})$.

Введём также подкласс $\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)$ класса $\mathcal{U}^n(M)$, состоящий из семейств, задаваемых функциями вида $\mathcal{A}(t,\mu) = B(t)+Q(t,\mu)$, где $B \in \mathcal{R}_n$, а непрерывная функция $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяет условию

$$\sup_{\mu\in M}\|Q(t,\mu)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Другими словами класс $\mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)$ можно было бы определить как класс правильных линейных систем (1) с равномерно убывающими к нулю на бесконечности параметрическими возмущениями их матриц коэффициентов. Далее мы отождествляем семейство (2) и задающую его матричнозначную функцию $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ и поэтому пишем $\mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)$ или $\mathcal{A} \in \mathcal{UZ}^n_{\mathcal{R}}(M)$.

В докладе рассматривается задача полного дескриптивно-функционального описания для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M каждого из классов пар функций

$$\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(\sigma_{\text{л}}(\cdot;\mathcal{A}), \mathrm{ti}(\cdot;\mathcal{A})) : \mathcal{A} \in \mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})\},$$

$$\mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(\sigma_{\text{л}}(\cdot;\mathcal{A}), \mathrm{ti}(\cdot;\mathcal{A})) : \mathcal{A} \in \mathcal{UZ}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})\}.$$

Прежде чем сформулировать ответ в этой задаче, напомним [5, с. 223–224], что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $({}^*, G_\delta)$, если для каждого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big([r,+\infty)\big)$ является G_δ-множеством в метрическом пространстве M. В частности, класс $({}^*, G_\delta)$ – собственный подкласс второго класса Бэра [5, с. 249].

Решение сформулированной задачи даёт следующая

Теорема. *Для любых $n \ge 2$ и метрического пространства M справедливо равенство классов $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})] = \mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})]$, а пара функций (σ,τ), где $\sigma\colon M \to \mathbb{R}_+$ и $\tau\colon M \to \{0,1\}$, принадлежит этим классам тогда и только тогда, когда функции σ и τ принадлежат классу $({}^*, G_\delta)$ и функция σ имеет непрерывную мажоранту.*

Замечание 1. Для любого метрического пространства M класс $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{1}}(\mathfrak{M})]$ состоит из пар (σ,τ), где $\sigma\colon M \to \mathbb{R}_+$ непрерывная и $\tau\colon M \to \{0,1\}$ полунепрерывная сверху функции, а класс $\mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^{\mathfrak{1}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})]$ – из двух пар тождественно постоянных на M функций: $(0,0)$ и $(0,1)$.

Замечание 2. Описание классов функций $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot\,;\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)\}$ и $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot\,;\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \in \mathcal{UZ}^n_{\mathfrak{R}}(M)\}$, состоящих из первых элементов пар классов $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})]$ и $\mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})]$, для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M получено в [6], а описание класса функций, состоящего из вторых элементов пар класса $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})]$, легко извлекается из результата [7].

Литература

1. Ляпунов А. М. Собр. сочинений. В 6-ти т. Т. 2. М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

3. Миллионщиков В. М. *Указатели и символы условной устойчивости линейных систем* // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1464.

4. Богданов Ю. С. *К теории систем линейных дифференциальных уравнений* // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814.

5. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М. – Л.: ОНТИ, 1937.

6. Барабанов Е. А., Быков В. В. *Коэффициент неправильности Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси, как функция параметра* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1587–1599.

7. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318. (Поправка: *Письмо в редакцию* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1726.)

ОБ ОЦЕНКЕ МАТРИЦЫ КОШИ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧАСТЯМИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Е.А. Барабанов, Н.С. Нипарко

Хорошо известно, что если у линейной дифференциальной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с $n \geqslant 2$ и непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ вещественные части всех собственных значений $\nu_i\big(A(t)\big)$, $i = \overline{1,n}$, матрицы $A(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ отрицательны (и даже отделены от нуля), то это ещё не гарантирует отрицательности (всех или некоторых) её показателей Ляпунова. Первые примеры такого рода построены Р. Э. Виноградом [1] (см. также [2, с. 124–126]).

Вместе с тем, если умножить правую часть системы (1), матрица коэффициентов которой удовлетворяет условию

$$\sup\{\operatorname{Re}\nu_i\big(A(t)\big) : t \in \mathbb{R}_+,\ i = \overline{1,n}\} = \Lambda < 0, \tag{2}$$

на любую достаточно большую положительную постоянную μ, то у получившейся системы

$$\dot{x} = \mu A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

не только все показатели Ляпунова будут отрицательными, но будет отрицательным и её верхний особый (генеральный) показатель $\Omega_0(\mu A)$ [2, с. 110]. Именно, в работах [3] (см. также [4, с. 74–76]) и [5, с. 137–139] доказано, что если выполнено условие (2), то найдутся