Замечание 2. Описание классов функций $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot\,;\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)\}$ и $\{\sigma_{\text{Л}}(\cdot\,;\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \in \mathcal{UZ}^n_{\mathfrak{R}}(M)\}$, состоящих из первых элементов пар классов $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})]$ и $\mathfrak{U}[\mathcal{UZ}^{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M})]$, для любых $n \in \mathbb{N}$ и метрического пространства M получено в [6], а описание класса функций, состоящего из вторых элементов пар класса $\mathfrak{U}[\mathcal{U}^{\mathfrak{n}}(\mathfrak{M})]$, легко извлекается из результата [7].

Литература

1. Ляпунов А. М. Собр. сочинений. В 6-ти т. Т. 2. М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.

3. Миллионщиков В. М. *Указатели и символы условной устойчивости линейных систем* // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 8. С. 1464.

4. Богданов Ю. С. *К теории систем линейных дифференциальных уравнений* // Докл. АН СССР. 1955. Т. 104. № 6. С. 813–814.

5. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М. – Л.: ОНТИ, 1937.

6. Барабанов Е. А., Быков В. В. *Коэффициент неправильности Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на временно́й полуоси, как функция параметра* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1587–1599.

7. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318. (Поправка: *Письмо в редакцию* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1726.)

ОБ ОЦЕНКЕ МАТРИЦЫ КОШИ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ЧАСТЯМИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Е.А. Барабанов, Н.С. Нипарко

Хорошо известно, что если у линейной дифференциальной системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с $n \geqslant 2$ и непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов $A(\cdot)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ вещественные части всех собственных значений $\nu_i\bigl(A(t)\bigr)$, $i = \overline{1,n}$, матрицы $A(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ отрицательны (и даже отделены от нуля), то это ещё не гарантирует отрицательности (всех или некоторых) её показателей Ляпунова. Первые примеры такого рода построены Р. Э. Виноградом [1] (см. также [2, с. 124–126]).

Вместе с тем, если умножить правую часть системы (1), матрица коэффициентов которой удовлетворяет условию

$$\sup\{\operatorname{Re}\nu_i\bigl(A(t)\bigr) : t \in \mathbb{R}_+,\ i = \overline{1,n}\} = \Lambda < 0, \tag{2}$$

на любую достаточно большую положительную постоянную μ, то у получившейся системы

$$\dot{x} = \mu A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

не только все показатели Ляпунова будут отрицательными, но будет отрицательным и её верхний особый (генеральный) показатель $\Omega_0(\mu A)$ [2, с. 110]. Именно, в работах [3] (см. также [4, с. 74–76]) и [5, с. 137–139] доказано, что если выполнено условие (2), то найдутся такие постоянные K и μ_0, что матрица Коши $X(t,\tau;\mu)$ системы (2) удовлетворяет оценке

$$\|X(t,\tau;\mu)\| \leqslant Ke^{\Lambda\mu(t-\tau)/2}$$

при всех $\mu \geqslant \mu_0$ и $t \geqslant \tau \geqslant 0$. Относительно матрицы $A(t)$ дополнительно предполагается: в [3], что она равномерно непрерывна на полуоси, а в [5], что она удовлетворяет условию Липшица. Кроме того, в [5] дана оценка сверху величины μ_0. Другими словами, умножение правой части системы (1) на достаточно большую положительную постоянную регуляризует систему в том смысле, что делает поведение её решений похожим на поведение решений линейной системы с постоянными коэффициентами.

Следующее утверждение обобщает приведённые результаты.

Теорема. *Пусть матричнозначная функция $A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, ограничена, удовлетворяет условию Липшица и условию (2), а $\mu(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – положительная неубывающая неограниченная функция. Тогда существует такое положительное число D, что матрица Коши $X(t,\tau)$ системы*

$$\dot{x} = \mu(t)A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

удовлетворяет неравенству $\|X(t,\tau)\| \leqslant De^{\Lambda(\widehat{\mu}(t)-\widehat{\mu}(\tau))/2}$ при всех $t \geqslant \tau \geqslant 0$, где $\widehat{\mu}(t) = \int_0^t \mu(\xi)d\xi$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Литература

1. Виноград Р. Э. *Об одном критерии неустойчивости в смысле Ляпунова решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений* // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. № 2. С. 201–204.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.
3. Флетто Л., Левинсон Н. *Периодические решения сингулярно возмущённых систем* // Математика (период. сб. переводов). 1958. Т. 2. № 2. С. 61–68.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений.* М.: Наука, 1973.
5. Стрыгин В.В., Соболев В. А. *Разделение движений методом интегральных многообразий.* М.: Наука, 1988.

О СУЩЕСТВОВАНИИ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНТРАСТНЫМИ СОЧЕТАНИЯМИ СВОЙСТВ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВСКОГО, ПЕРРОНОВСКОГО И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНОГО ТИПОВ

А.А. Бондарев

Настоящий доклад посвящён исследованию сочетаний ляпуновских и перроновских [1, 2], а также верхнепредельных [3] свойств дифференциальных систем. Она логически продолжает цикл работ [4–8] автора, усиливая их результаты:

1) работа [4] исправляла недостаток, указанный в [9, замечание 4], но построенная в ней двумерная система обладала хотя и *ограниченным* на всей полуоси времени, однако же ненулевым линейным приближением вдоль нулевого решения;

2) в работе же [5] построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением;