такие постоянные K и μ_0, что матрица Коши $X(t,\tau;\mu)$ системы (2) удовлетворяет оценке

$$\|X(t,\tau;\mu)\| \leqslant Ke^{\Lambda\mu(t-\tau)/2}$$

при всех $\mu \geqslant \mu_0$ и $t \geqslant \tau \geqslant 0$. Относительно матрицы $A(t)$ дополнительно предполагается: в [3], что она равномерно непрерывна на полуоси, а в [5], что она удовлетворяет условию Липшица. Кроме того, в [5] дана оценка сверху величины μ_0. Другими словами, умножение правой части системы (1) на достаточно большую положительную постоянную регуляризует систему в том смысле, что делает поведение её решений похожим на поведение решений линейной системы с постоянными коэффициентами.

Следующее утверждение обобщает приведённые результаты.

Теорема. *Пусть матричнозначная функция* $A(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, *ограничена, удовлетворяет условию Липшица и условию (2), а* $\mu(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *– положительная неубывающая неограниченная функция. Тогда существует такое положительное число* D, *что матрица Коши* $X(t,\tau)$ *системы*

$$\dot{x} = \mu(t)A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

удовлетворяет неравенству $\|X(t,\tau)\| \leqslant De^{\Lambda(\widehat{\mu}(t)-\widehat{\mu}(\tau))/2}$ *при всех* $t \geqslant \tau \geqslant 0$, *где* $\widehat{\mu}(t) = \int\limits_0^t \mu(\xi)d\xi$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Литература

1. Виноград Р. Э. *Об одном критерии неустойчивости в смысле Ляпунова решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений* // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84. № 2. С. 201–204.

2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости.* М.: Наука, 1966.

3. Флетто Л., Левинсон Н. *Периодические решения сингулярно возмущённых систем* // Математика (период. сб. переводов). 1958. Т. 2. № 2. С. 61–68.

4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений.* М.: Наука, 1973.

5. Стрыгин В.В., Соболев В. А. *Разделение движений методом интегральных многообразий.* М.: Наука, 1988.

О СУЩЕСТВОВАНИИ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С КОНТРАСТНЫМИ СОЧЕТАНИЯМИ СВОЙСТВ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВСКОГО, ПЕРРОНОВСКОГО И ВЕРХНЕПРЕДЕЛЬНОГО ТИПОВ

А.А. Бондарев

Настоящий доклад посвящён исследованию сочетаний ляпуновских и перроновских [1, 2], а также верхнепредельных [3] свойств дифференциальных систем. Она логически продолжает цикл работ [4–8] автора, усиливая их результаты:

1) работа [4] исправляла недостаток, указанный в [9, замечание 4], но построенная в ней двумерная система обладала хотя и *ограниченным* на всей полуоси времени, однако же ненулевым линейным приближением вдоль нулевого решения;

2) в работе же [5] построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением;

3) в работе [6] построена двумерная система, обладающая как *перроновской*, так и *верхнепредельной*, с одной стороны, *полной неустойчивостью* (а поэтому и *ляпуновской глобальной неустойчивостью* тоже), а с другой стороны, *массивной частной устойчивостью* (в отличие от всех рассмотренных выше примеров, в которых эта частная устойчивость была лишь *точечной*);

4) в работе [7] представлена двумерная система, у которой имеется, с одной стороны, *ляпуновская глобальная неустойчивость* (которая имелась и у систем из работ [4–6]), а с другой стороны, как *перроновская*, так и *верхнепредельная глобальная устойчивость* (в отличие от всех примеров предложенных ранее);

5) в работе [8] результат из работы [7] был распространён на фазовые пространства сколь угодно высокой размерности, но лишь чётной.

Некоторые примеры столь контрастных сочетаний ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств представлены также в работе [10].

Нижеследующее усиление результатов работ [6–8], а также [10, теоремы 1 и 2] состоит, во-первых, в распространении их на случай неодномерных фазовых пространств сколь угодно высокой размерности (с некоторым дополнительным упорядочением свойств пограничных решений), а во-вторых, в том, что обе приводящиеся здесь системы обладают теперь уже не просто *ляпуновской глобальной неустойчивостью*, но даже и ляпуновской *крайней* неустойчивостью (см. п. 1 в теореме 2 ниже).

Для числа $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматриваем дифференциальные системы

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \equiv (x_1,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

правые части которых удовлетворяют условиям

$$f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f, f'_x \in C\left(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n\right), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

а значит, обеспечивают существование и единственность решений задач Коши и допускают нулевое решение.

Теорема 1. *Для каждого $n > 1$ существует система* (1), *которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям* (2) *и*

$$f'_x(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

а также обладает следующими двумя свойствами:

1) *для всех решений x, удовлетворяющих начальному условию $0 < |x(0)| \leqslant 1$, имеет место равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty;$$

2) *все остальные решения x удовлетворяют равенству*

$$\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для каждого $n > 1$ существует система* (1), *которая имеет правую часть, удовлетворяющую условиям* (2) *и* (3), *а также обладает следующими двумя свойствами:*

1) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех решений x, удовлетворяющих начальному условию $0 < |x(0)| < \delta$, справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| > \varepsilon^{-1};$$

2) *все решения* x *удовлетворяют равенству* (4).

Системы, существование которых утверждается в теоремах 1 и 2, неавтономны, неодномерны и нелинейны. Более того:

– полученные результаты не распространяются на автономные системы, поскольку для них полная и глобальная неустойчивости сразу всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) логически неразличимы [11];

– ни одномерных, ни линейных (однородных) систем с такими наборами свойств не существует, поскольку для них ляпуновская полная (а значит, и глобальная) неустойчивость эквивалентна верхнепредельной глобальной неустойчивости [3].

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 22-8-10-3-1).

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Сергеев И. Н. *Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

3. Сергеев И. Н. *Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

4. Бондарев А. А. *Один пример неустойчивой системы* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.

5. Бондарев А. А. *Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.

6. Бондарев А. А. *Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 147–152.

7. Бондарев А. А. *О существовании дифференциальной системы с ляпуновской глобальной неустойчивостью, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1011–1019.

8. Bondarev A. A. *An Example of Contrasting Combination to Stability and Instability Properties in Even-Dimensional Spaces* // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2022. V. 87. P. 25–36.

9. Сергеев И. Н. *Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.

10. Бондарев А. А., Сергеев И. Н. *Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств* // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506. С. 25–29.

11. Сергеев И. Н. *Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем* // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.

О МНОЖЕСТВАХ ТОЧЕК ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ НЕАВТОНОМНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А.Н. Ветохин

Для количественной оценки неустойчивости по начальным условиям в автономной динамической системе в книге [1, с. 274] было введено понятие локальной энтропии автономной динамической системы. Мы приведем аналогичное определение для случая неавтономной динамической системы.