

2) все решения x удовлетворяют равенству (4).

Системы, существование которых утверждается в теоремах 1 и 2, неавтономны, неоднородны и нелинейны. Более того:

– полученные результаты не распространяются на автономные системы, поскольку для них полная и глобальная неустойчивости сразу всех трёх типов (ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) логически неразличимы [11];

– ни одномерных, ни линейных (однородных) систем с такими наборами свойств не существует, поскольку для них ляпуновская полная (а значит, и глобальная) неустойчивость эквивалентна верхнепредельной глобальной неустойчивости [3].

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 22-8-10-3-1).

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.
2. Сергеев И. Н. *Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.
3. Сергеев И. Н. *Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.
4. Бондарев А. А. *Один пример неустойчивой системы* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.
5. Бондарев А. А. *Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону* // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.
6. Бондарев А. А. *Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 147–152.
7. Бондарев А. А. *О существовании дифференциальной системы с ляпуновской глобальной неустойчивостью, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 8. С. 1011–1019.
8. Bondarev A. A. *An Example of Contrasting Combination to Stability and Instability Properties in Even-Dimensional Spaces* // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. 2022. V. 87. P. 25–36.
9. Сергеев И. Н. *Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.
10. Бондарев А. А., Сергеев И. Н. *Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств* // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506. С. 25–29.
11. Сергеев И. Н. *Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем* // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.

О МНОЖЕСТВАХ ТОЧЕК ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ НЕАВТОНОМНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А.Н. Ветохин

Для количественной оценки неустойчивости по начальным условиям в автономной динамической системе в книге [1, с. 274] было введено понятие локальной энтропии автономной динамической системы. Мы приведем аналогичное определение для случая неавтономной динамической системы.

Пусть X — локально компактное метрическое пространство, $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ — последовательность непрерывных отображений из X в X . Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^{\circ i}(x), f^{\circ i}(y)), \quad (f^{\circ i} \equiv f_i \circ \dots \circ f_1, f^{\circ 0} \equiv \text{id}_X), \quad x, y \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем точку $x \in X$, для всяких $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ и $\rho > 0$ обозначим через $N_d(f, r, n, x, \rho)$ максимальное число точек в шаре $B_d(x, \rho) = \{y \in X : d(x, y) < \rho\}$, попарные d_n^f -расстояния между которыми больше, чем r . Тогда локальную энтропию неавтономной динамической системы f в точке x определяют формулой

$$h_d(f, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\rho \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho),$$

отметим, что пределы в последней формуле существуют, так как величина

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(f, r, n, x, \rho)$$

не возрастает с уменьшением ρ и не убывает с уменьшением r . Для того, чтобы получить классическое определение локальной энтропии автономной динамической системы [1, с. 274], нужно в качестве последовательности f взять стационарную последовательность $(f, f, \dots)$.

Для фиксированной последовательности непрерывных отображений $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$, $f_k : X \rightarrow X$ рассмотрим функцию

$$x \mapsto h_d(f, x), \quad (1)$$

как показывает следующий пример функция (1) может быть разрывной на пространстве X даже в случае стационарной последовательности непрерывных отображений.

Рассмотрим отображение отрезка $[0, 1]$ в себя вида $t(x) = 4x(1-x)$. В книге [2, с. 502] установлено, что топологическая энтропия непрерывного отображения t равна $\ln 2$. Напомним, что в случае компактного метрического пространства X топологическая энтропия непрерывного отображения $g : X \rightarrow X$ вычисляется по формуле [2, с. 122]

$$h_{\text{top}}(g) = \lim_{r \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(g, r, n),$$

где $N_d(g, r, n)$ максимальное число точек в X попарные d_n^f -расстояния между которыми больше чем r . Пусть $X = [-1, 1]$ и отображение g имеет вид

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-1, 0); \\ 4x(1-x), & \text{если } x \in [0, 1], \end{cases}$$

тогда для последовательности $(g, g, \dots)$ имеем $h_d(g, x) = 0$, при $x \in [-1, 0)$. Если $x = 0$, то найдутся бесконечно малая последовательность положительных действительных чисел $(\rho_m)_{m=1}^\infty$ и последовательность натуральных чисел $(q_m)_{m=1}^\infty$ такие, что выполнено равенство

$$g^{q_m}(\{x : |x| \leq 1/\rho_m\}) = [0, 1],$$

а следовательно для любого натурального числа n , $(q_m + n)$ -я итерация отображения g совпадает с n -ой итерацией отображения t , таким образом получаем оценку локальной энтропии отображения g в точке $x = 0$ снизу

$$h_d(g, 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_m + n} \ln N_d(g, r, q_m + n, 0, \rho_m) \geq$$

$$\geq \lim_{r \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln N_d(t, r, n) = h_{\text{top}}(t) = \ln 2,$$

следовательно функция $x \mapsto h_d(g, x)$ имеет разрыв в нуле.

Возникают естественные вопросы о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (1) и о дескриптивном типе множества точек полунепрерывности сверху (снизу) этой функции.

Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве X называются непрерывные функции, и для всякого натурального числа p функциями p -го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$ -го класса.

В работе [3], в случае стационарной последовательности f , установлено, что функция (1) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X . Для неавтономных динамических систем справедлив аналогичный результат.

Теорема 1. *Для любой последовательности непрерывных отображений $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ функция (1) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X .*

В работе [3], в случае стационарной последовательности f , установлено, что множество точек полунепрерывности снизу функции (1) содержит всюду плотное множество типа G_δ . Оказывается справедливо более сильное утверждение.

Теорема 2. *Для любой последовательности непрерывных отображений $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ множество точек полунепрерывности снизу функции (1) является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве X , а множество ее точек полунепрерывности сверху — множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве X .*

Если пространство X является множеством Кантора на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, то существует стационарная последовательность $(f, f, \dots)$, такая, что функция (1) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на пространстве X [3]. Оказывается справедлив более сильный результат

Теорема 3. *Если пространство X является множеством Кантора на отрезке $[0, 1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, то существует стационарная последовательность $(f, f, \dots)$ непрерывных отображений такая, что множество точек полунепрерывности сверху функции (1) пусто.*

Литература

1. Каток А.Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений*. М.: МЦНМО, 2005.
2. Каток А.Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем*. М.: Факториал, 1999.
3. Vetokhin A. N. *Exact Baire class of the local entropy considered as a function of a point in the phase space*. International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE-2022" December 17–19, 2022, Tbilisi, Georgia. P. 228-231. <http://mi.mathnet.ru/de6716>

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ И ДИАМЕТРЫ ИХ РЕШЕНИЙ

А.С. Войделевич

В докладе рассматриваются линейные рекуррентные уравнения, которые являются дискретными аналогами линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары [1]. Решения таких уравнений представляют собой последовательности компактных