$$\geqslant \lim_{r\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln N_d(t,r,n) = h_{\mathrm{top}}(t) = \ln 2,$$

следовательно функция $x \mapsto h_d(g,x)$ имеет разрыв в нуле.

Возникают естественные вопросы о наименьшем бэровском классе, которому принадлежит функция (1) и о дескриптивном типе множества точек полунепрерывности сверху (снизу) этой функции.

Напомним, что функциями нулевого бэровского класса на метрическом пространстве X называются непрерывные функции, и для всякого натурального числа p функциями p-го бэровского класса называются функции, являющиеся поточечными пределами последовательностей функций $(p-1)$-го класса.

В работе [3], в случае стационарной последовательности f, установлено, что функция (1) принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X. Для неавтономных динамических систем справедлив аналогичный результат.

Теорема 1. *Для любой последовательности непрерывных отображений $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ функция* (1) *принадлежит второму бэровскому классу на пространстве X.*

В работе [3], в случае стационарной последовательности f, установлено, что множество точек полунепрерывности снизу функции (1) содержит всюду плотное множество типа G_δ. Оказывается справедливо более сильное утверждение.

Теорема 2. *Для любой последовательности непрерывных отображений $f \equiv (f_1, f_2, \dots)$ множество точек полунепрерывности снизу функции* (1) *является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве X, а множество ее точек полунепрерывности сверху — множеством типа $F_{\sigma\delta}$ в пространстве X.*

Если пространство X является множеством Кантора на отрезке $[0,\,1]$ с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, то существует стационарная последовательность $(f, f, \dots)$, такая, что функция (1) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра на пространстве X [3]. Оказывается справедлив более сильный результат

Теорема 3. *Если пространство X является множеством Кантора на отрезке* $[0,\,1]$ *с метрикой, индуцированной естественной метрикой вещественной прямой, то существует стационарная последовательность $(f, f, \dots)$ непрерывных отображений такая, что множество точек полунепрерывности сверху функции* (1) *пусто.*

Литература

1. Каток А. Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем с обзором последних достижений.* М.: МЦНМО, 2005.

2. Каток А. Б., Хасселблат Б. *Введение в современную теорию динамических систем.* М.: Факториал, 1999.

3. Vetokhin A. N. *Exact Baire class of the local entropy considered as a function of a point in the phase space.* International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations "QUALITDE–2022"December 17–19, 2022, Tbilisi, Georgia. P. 228-231. http://mi.mathnet.ru/de6716

ЛИНЕЙНЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЫПУКЛЫХ КОМПАКТОВ И ДИАМЕТРЫ ИХ РЕШЕНИЙ

А.С. Войделевич

В докладе рассматриваются линейные рекуррентные уравнения, которые являются дискретными аналогами линейных дифференциальных уравнений с производной Хукухары [1]. Решения таких уравнений представляют собой последовательности компактных выпуклых множеств пространства $\mathbb{R}^d$ при некотором $d \in \mathbb{N}$, а значит, обладают нетривиальными геометрическими характеристиками, изучение которых представляет определённый интерес. Прежде чем сформулировать полученные результаты введём необходимые обозначения и приведём ряд определений.

Суммой Минковского $Z = X + Y$ двух множеств X, $Y \subset \mathbb{R}^d$ называется множество $Z \overset{def}{=} \{x+y\colon x \in X,\, y \in Y\}$. Для действительной матрицы A, состоящей из d столбцов, и множества $X \subset \mathbb{R}^d$, через AX обозначим множество $\{Ax\colon x \in X\}$. Отметим, что для произвольных действительных матриц A, B и множества $X \subset \mathbb{R}^d$, вообще говоря, $(A+B)X \neq AX + BX$.

Совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$ обозначим через $K_c(\mathbb{R}^d)$. Рассмотрим линейное рекуррентное уравнение

$$X(t+1) = \sum_{i=1}^{n} A_i X(t), \quad X(0) \in K_c(\mathbb{R}^d), \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{1}$$

с действительными $d \times d$-матрицами коэффициентов A_i, $1 \le i \le n$.

Через $\Omega(\mathbb{R}^d)$ обозначим семейство всех непустых ограниченных подмножеств пространства $\mathbb{R}^d$. Диаметром $\operatorname{diam} X$ множества $X \in \Omega(\mathbb{R}^d)$ называется число $\sup_{a,b\in X} \|b-a\|_2$.

Определение 1. *Диаметром решения* $X(\cdot)$ уравнения (1) назовём последовательность диаметров $\operatorname{diam} X(0)$, $\operatorname{diam} X(1)$, $\ldots$ множеств $X(0)$, $X(1)$, $\ldots \in K_c(\mathbb{R}^d)$. Будем говорить, что у уравнения (1) все решения постоянного диаметра, если для произвольного его решения $X(\cdot)$ верно равенство $\operatorname{diam} X(t) = \operatorname{diam} X(0)$ при любом $t \in \mathbb{N}$.

Естественно возникает задача получить необходимое и достаточное условие того, что у уравнения (1) все решения постоянного диаметра. Полное решение сформулированной задачи даёт следующая теорема.

Теорема 1. *У уравнения (1) тогда и только тогда все решения постоянного диаметра, когда существуют такие действительные числа* α_1, α_2, $\ldots$, α_n *и ортогональная* $d \times d$*-матрица* A, *что* $\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_1| = 1$ *и* $A_i = \alpha_i A$, $1 \le i \le n$.

Рассмотрим частный случай уравнения (1):

$$X(t+1) = \alpha X(t) + AX(t), \quad X(0) \in K_c(\mathbb{R}^d), \quad t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{2}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $A \in M_d(\mathbb{R})$. Через $\mu_1(A)$ обозначим максимальное по модулю собственное значение матрицы A. Показатель Ляпунова $\lambda[x]$ произвольной последовательности $x(0)$, $x(1)$, $\ldots$ действительных чисел определяется по формуле $\lambda[x] \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} |x(t)|^{1/t}$. Показатель Ляпунова $\lambda[x]$ называется строгим, если существует предел $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)|^{1/t}$.

Теорема 2. *Пусть* $X_0 \in K_c(\mathbb{R}^d)$ *– выпуклое компактное множество с непустой внутренностью, а* $X(\cdot)$ *– такое решение уравнения (2), что* $X(0) = X_0$. *Тогда показатель Ляпунова* $\lambda[diam\, X]$ *диаметра решения* $X(\cdot)$ *является строгим и равен* $|\alpha| + |\mu_1(A)|$.

Литература

1. Hukuhara M. *Integration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe* // Funk. Ekv. 1967. V. 10. P. 205–223.