НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ДИАГОНАЛЬНОГО БЛОКА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

А.К. Деменчук

Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^{\varkappa}, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $n \times n$-матрица, B – постоянная $n \times r$-матрица $r \leq n$, u – управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах [1 - 2] и др., при этом в периодическом случае множества частот решения и самой системы совпадали.

Вместе с тем, как следует из работ Х. Массера [3], Я. Курцвейль и О. Вейвода [4] и др., система обыкновенных дифференциальных периодических (почти периодических) уравнений может допускать решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. Позднее такого рода решения были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными. Отметим, что случае периодических систем нерегулярность означает несоизмеримость периодов решения и системы.

В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество показателей Фурье которых содержится в модуле частот матрицы коэффициентов. Применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем [5, гл. III]: выбрать такое программное управление

$$u = u(t) \tag{2}$$

из указанного допустимого множества, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{3}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством).

В работе [6] рассмотрена система (1) с нулевыми строками матрицы при управлении, при этом среднее значение матрицы коэффициентов имеет невырожденный левый верхний диагональный блок и остальные её блоки – нулевые. В настоящей докладе приведем необходимые условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром в случае, когда указанный блок является вырожденным.

Пусть $P = (p_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, – некоторая матрица и $1 \leq k_1 < \ldots < k_s \leq n$, $1 \leq l_1 < \ldots < l_q \leq m$ – две упорядоченные последовательности натуральных чисел. Через $P^{l_1 \ldots l_q}_{k_1 \ldots k_s}$ обозначим $s \times q$-матрицу, образованную из элементов матрицы P, стоящих на пересечении строк с номерами $k_1, \ldots, k_s$ и столбцов с номерами $l_1, \ldots, l_q$.

Для непрерывной на всей числовой оси ω-периодической вещественнозначной матрицы (вектора) $F(t)$ определим её среднее значение

$$\hat{F} = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^{\omega} F(t)dt$$

и осциллирующую часть $\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}$. Под модулем частот матрицы $F(t)$ понимаем множество всевозможных линейных комбинаций с целыми коэффициентами показателей Фурье этой матрицы. Через $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}\, F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ – наибольшее число её линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг матрицы. Очевидно, что в общем случае строчный и столбцовый ранги переменной матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать.

Далее считаем, что ранг постоянной матрицы B не является максимальным и строки с номерами $k_1, \ldots, k_d$, $1 \leq k_1 < \ldots < k_d \leq n$ нулевые, т.е.

$$\mathrm{rank}\, B = r_1 < r, \quad B^{1\ldots r}_{k_1\ldots k_d} = 0 \quad (d = n - r_1). \tag{4}$$

Будем также предполагать, что среднее значение матрицы коэффициентов представимо в виде

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} & \hat{A}^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d} \\ \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_{d+1}\ldots k_n} & \hat{A}^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_{d+1}\ldots k_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} = \mathrm{diag}\,(\hat{a}_{k_1 k_1}, \ldots, \hat{a}_{k_d k_d}), \tag{5}$$

причем $\hat{a}_{k_1 k_1} \cdots \hat{a}_{k_d k_d} = 0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\hat{a}_{k_{1+i-1}\, k_{1+i-1}} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad 1 \leq m < d, \tag{6}$$

а остальные элементы ненулевые.

Пусть $k_{d+1}, \ldots, k_n$, $1 \leq k_{d+1} < \ldots < k_n \leq n$ – номера ненулевых строк матрицы B. С учетом нумерации нулевых и ненулевых строк этой матрицы для упрощения записи примем следующие обозначения:

$$A_{11}(t) = A^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d}(t), \quad A_{12}(t) = A^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d}(t).$$

Через $\tilde{A}^{(1)}_{11}(t)$ обозначим $d \times m$-матрицу, составленную из первых m столбцов $d \times d$-блока $\tilde{A}_{11}(t)$. Построим $d \times (m + r_1)$-матрицу

$$\tilde{A}_*(t) = [\tilde{A}^{(1)}_{11}(t) \;\; A_{12}(t)].$$

Справедлива

Теорема. *Если для линейной системы (1), (4) – (6), разрешима задача управления асинхронным спектром, то выполняется оценка*

$$\mathrm{rank}_{\mathrm{col}}\, \tilde{A}_*(t) = r_2 < r_1 + m.$$

Исследования выполнены в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПФИ “Конвергенция -2025” (подпрограмма "Математические модели и методы").

Литература

1. Зубов, В. И. *Лекции по теории управления.* М.: Наука,1975.

2. Макаров, Е. К., Попова, С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем.* Минск: Бел. навука, 2012.

3. Massera, J.L. *Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales* // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, № 1. P. 37 – 45.

4. Курцвейль, Я.,Вейвода, О. *О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5, № 3. С. 362 – 370.

5. Деменчук А.К. *Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления.* Lambert Academic Publishing. Saarbrucken, 2012.

6. Деменчук А.К. *Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов* // Труды Института математики. 2022. Т. 30, № 1-2. С. 22 – 29.