Литература

1. Мартынов И. П. *Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 5. С. 764–771.
2. Мартынов И. П. *Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей* // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 6. С. 937–946.
3. Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном уравнении третьего порядка типа Пенлеве* // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 9. С. 1640–1641.
4. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Аналитические свойства решений одного класса уравнений третьего порядка* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1219–1224.
5. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *Об одном классе дифференциальных уравнений третьего порядка без подвижных многозначных особых точек.* В сб. матер. Респ. науч.-практ. конф., посвящ. 450-летию со дня рождения Г. Галилея, (17–18 апреля 2014 г., Брест, Беларусь). (Под общ. ред. Н.Н. Сендера) Брест: БрГУ. 2014. С. 11–13.
6. Adjabi Y., Jrad F., Kessi A., Mugan U. *Third order differential equations with fixed critical points* Stud. Appl. Math. 2009. Vol. 208. № 1. P. 238–248.

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ РЕЗОНАНСАМИ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Т.К. Андреева, И.П. Мартынов, М.В. Мисник

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$(y'-y^2)y'''=(1-1/\nu)(y'')^2-2yy'y'', \tag{1}$$

где y – комплекснозначная функция от z, z – независимая комплексная переменная, $\nu\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Этим уравнением может быть определена одна из компонент квадратичной системы третьего порядка.

Найдем необходимые и достаточные условия наличия свойства Пенлеве у уравнения (1), укажем в каких функциях выражается решение полученного уравнения. Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$y=-\frac{1+\frac{2}{\nu}}{z-z_0}+...+h_r(z-z_0)^{r-1}+...,$$

где z_0, h_r – произвольные постоянные, тогда уравнение для определения r примет вид

$$(r+1)(r^2-(\nu+3)r-\nu-2)=0. \tag{2}$$

Для наличия свойства Пенлеве у уравнения (1) будем требовать, чтобы корни уравнения (2) были целыми, различными, отличными от 0 [1,2]. Это требование выполнено только при $\nu=-8.$ В этом случае первый интеграл уравнения (1) имеет вид

$$y''=-\frac{8}{z-K}(y'-y^2), \tag{3}$$

где K – произвольная постоянная. В (3) положим $y=-\frac{3}{4}t^3u(t)+\frac{3}{4}t,$ где $t=-\frac{1}{z-K}$, тогда для $u(t)$ получим уравнение

$$\ddot{u}=6u^2, \tag{4}$$

где $\ddot{u}=\frac{d^2u}{dt^2}$. Запишем первый интеграл уравнения (4): $\dot{u}^2=4u^3+C,$ где C – произвольная постоянная. Таким образом, доказана

Теорема. *Уравнение (1) обладает свойством Пенлеве при* $\nu = -8$, *причем его общее решение выражается через эллиптическую функцию.*

Обозначим $y = \frac{3}{4}w$, тогда (3) примет вид

$$w'' = -\frac{8}{z-K}w' + \frac{6}{z-K}w^2. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет рациональное решение вида $w = \frac{a}{(z-a-K)^2} - \frac{1}{z-a-K}$, где a – произвольная постоянная.

Литература

1. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. *A connection between nonlinear evolution and ordinary differential equations of P-type II* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. № 5. P. 1006–1015.

2. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *О применении рядов Лорана для представления решений дифференциальных уравнений* // Научные исследования преподавателей факультета математики и информатики: сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: И.П. Мартынов (отв. ред.) [и др.]. Гродно: ГрГУ, 2010. С. 37–40.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ

А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина

Рассмотрим задачу об обобщенных решениях для уравнения Риккати вида

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0,\ \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1}$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) с условием $w(z_0) = C \neq 0$ является функцией

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}, \quad \text{где} \quad a = z_0 - \frac{1}{\gamma C},$$

однозначно определенной при $z \neq a$. Так как $\gamma \in \mathbb{R}$, то при вещественных $z_0 = x_0$ и C по этой формуле на всей вещественной оси однозначно определено вещественнозначное решение задачи Коши $\frac{1}{\gamma(x-a)}$, имеющее особенность в точке a. Этому решению, которое назовем *формальным*, соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций [1] вида

$$\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma}M\delta_a, \tag{2}$$

где M – произвольная постоянная. Уравнение на прямой, соответствующее уравнению (1), имеет вид

$$u'(x) + \gamma u^2(x) = 0. \tag{3}$$

Распределения (2) нельзя подставить в уравнение, так как квадрат такого распределения не определен в классической теории. Поэтому требуется выяснить, какие из распределений (2) и в каком смысле можно считать решениями уравнения (3).

В случае дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами обобщенные коэффициенты заменяются на их аппроксимации семействами гладких функций, зависящими от малого параметра ε. Тогда семейство аппроксимирующих уравнений