УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МАССЕРЫ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.К. Деменчук, А.В. Конюх

Рассмотрим линейную неоднородную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, с непрерывными ω-периодическими матрицей коэффициентов $A(t)$ и свободным членом $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$. В работе [1] Х. Л. Массера доказал следующий замечательный результат: если у системы (1) существует ограниченное решение, то у неё существует и ω-периодическое решение. Другими словами, для существования у ω-периодической системы (1) ω-периодического решения необходимо и достаточно существования у неё ограниченного решения. Таким образом, теорема Массеры сводит задачу о наличии у системы (1) ω-периодического решения к задаче о наличии у неё ограниченного решения.

Последняя задача проще исходной, поскольку класс $\mathcal{B}$ ограниченных непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ существенно шире его подкласса $\mathcal{P}_\omega$, состоящего из ω-периодических вектор-функций. Действительно, введём на множестве $\mathcal{B}$ метрику $\mathrm{dist_u}$ равномерной сходимости на оси: $\mathrm{dist_u}(f,g) = \min\{1, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t) - g(t)\|\}$ для всех $f, g \in \mathcal{B}$. Обозначим получившееся метрическое пространство через $\mathcal{B}_\mathrm{u}$. Несложно показать, что множество $\mathcal{P}_\omega$ является замкнутым нигде не плотным в $\mathcal{B}_\mathrm{u}$, а значит, в частности, имеет в $\mathcal{B}_\mathrm{u}$ первую категорию по Бэру. Таким образом, почти все в смысле категории функции пространства $\mathcal{B}_\mathrm{u}$ не являются ω-периодическими. Тем не менее, согласно теореме Массеры, только из факта существования решения, принадлежащего “широкому” классу (классу $\mathcal{B}$) вытекает существование решения, принадлежащего “узкому” классу (классу $\mathcal{P}_\omega$) – ситуация в общем случае довольно редкая и, вообще говоря, довольно неожиданная.

Возникает естественный вопрос, нельзя ли расширить класс $\mathcal{B}$ так, чтобы из того, что ω-периодическая система (1) имеет решение в этом более широком классе следовало бы, что она имеет и ω-периодическое решение.

Введём следующее

Определение. Скажем, что вектор-функция $x(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *растёт медленнее линейной функции*, если имеет место равенство

$$\lim_{t\to+\infty} (\|x(t)\|/t) = 0. \tag{2}$$

Класс непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, которые растут медленнее линейной функции, обозначим через $\mathcal{L}$. Очевидно, что класс $\mathcal{L}$ шире класса $\mathcal{B}$. Например, не ограниченная на $\mathbb{R}$ вектор-функция $(\ln(t^2{+}1), 1, \ldots, 1)^\mathrm{т}$ растёт медленнее линейной функции. Поэтому следующее утверждение усиливает теорему Массеры.

Теорема. *У ω-периодической системы (1) тогда и только тогда существует ω-периодическое решение, когда у неё существует решение, которое растёт медленнее линейной функции.*

Естественно возникает вопрос, насколько существенно расширение $\mathcal{L}$ множества $\mathcal{B}$. Если рассматривать в $\mathcal{L}$ метрику $\mathrm{dist_u}$ равномерной сходимости на оси, то с точки зрения категорий различий между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ нет, так как в этой метрике $\mathcal{L}$ является объединением двух открытых множеств: интересующего нас множества $\mathcal{B}$ и его дополнения $\mathcal{L} \setminus \mathcal{B}$.

Рассмотрим в $\mathcal{L}$ метрику $\mathrm{dist_c}$ равномерной сходимости на отрезках, она задаётся равенством $\mathrm{dist_c}(f,g) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min\{\|f(t)-g(t)\|, |t|^{-1}\}$ для всех $f,g \in \mathcal{L}$. Получившееся метрическое пространство обозначим через $\mathcal{L}_\mathrm{c}$. Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{B}$ имеет в $\mathcal{L}_\mathrm{c}$ первую категорию по Бэру. Таким образом, в метрическом пространстве $\mathcal{L}_\mathrm{c}$ почти все функции в смысле категории не ограничены на оси, т.е. не принадлежат множеству $\mathcal{B}$.

Для полноты рассмотрения укажем, хотя это имеет к рассматриваемым вопросам косвенное отношение, что каждое из метрических пространств $\mathcal{B}_\mathrm{u}$ и $\mathcal{L}_\mathrm{c}$ является на самом себе множеством первой категории по Бэру.

В дополнение к сформулированной теореме отметим, что условие (2) является точным: для любого $\alpha > 0$ существуют такие ω-периодические системы (1), у которых имеется решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее условию $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} (\|x(t)\|/t) \geq \alpha$, и ω-периодические решения отсутствуют.

Литература

1. Massera J. L. *The existence of periodic solutions of systems of differential equations* // Duke Math. J. 1950. V. 17. № 4. P. 457–475.

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРЫ ИНДЕКСОВ УСТОЙЧИВОСТИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М.И. Зайдель

Для заданного натурального $n \geq 2$ рассмотрим множество $\mathcal{M}_n$ линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Для краткости мы отождествляем систему (1) с матричнозначной функцией $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ и пишем $A \in \mathcal{M}_n$.

Обозначим через $\mathrm{s}(A)$ индекс устойчивости системы $A \in \mathcal{M}_n$, т.е. размерность линейного подпространства её ограниченных решений, а через $\mathrm{es}(A)$ – индекс экспоненциальной устойчивости этой системы, т.е. размерность линейного подпространства её решений с отрицательными характеристическими показателями Ляпунова [1, с. 12].

В работе [2] О. Перрон построил пример системы $A \in \mathcal{M}_2$, индекс экспоненциальной устойчивости которой равен двум, и такого её непрерывного возмущения Q, экспоненциально убывающего к нулю на бесконечности, что оба индекса устойчивости возмущённой системы $A+Q \in \mathcal{M}_2$ равны единице, т.е. в примере Перрона имеет место потеря устойчивости.

Мы приведём обобщение этого эффекта, называемого теперь эффектом Перрона [3, гл. 4; 4], для чего для системы $A \in \mathcal{M}_n$ и метрического пространства M рассмотрим класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q\colon \mathbb{R}_+ \times M \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих оценке $\|Q(t,\mu)\| \leq C_Q \exp(-\sigma_Q t)$ для всех $(t,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times M$, где C_Q и σ_Q – положительные постоянные (свои для каждой функции Q), и таких, что индексы устойчивости и экспоненциальной устойчивости системы $A+Q$, являющиеся функциями $\mu \in M$ и обозначаемые $\mathrm{s}(\cdot\,; A+Q)$ и $\mathrm{es}(\cdot\,; A+Q)$, не превосходят соответствующие индексы устойчивости системы A, т.е. $\mathrm{s}(\mu; A+Q) \leq \mathrm{s}(A)$ и $\mathrm{es}(\mu; A+Q) \leq \mathrm{es}(A)$ при всех $\mu \in M$.