Рассмотрим в $\mathcal{L}$ метрику $\mathrm{dist_c}$ равномерной сходимости на отрезках, она задаётся равенством $\mathrm{dist_c}(f,g)=\sup_{t\in\mathbb{R}}\min\{\|f(t)-g(t)\|,|t|^{-1}\}$ для всех $f,g\in\mathcal{L}$. Получившееся метрическое пространство обозначим через $\mathcal{L}_{\mathrm{c}}$. Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{B}$ имеет в $\mathcal{L}_{\mathrm{c}}$ первую категорию по Бэру. Таким образом, в метрическом пространстве $\mathcal{L}_{\mathrm{c}}$ почти все функции в смысле категории не ограничены на оси, т.е. не принадлежат множеству $\mathcal{B}$.

Для полноты рассмотрения укажем, хотя это имеет к рассматриваемым вопросам косвенное отношение, что каждое из метрических пространств $\mathcal{B}_{\mathrm{u}}$ и $\mathcal{L}_{\mathrm{c}}$ является на самом себе множеством первой категории по Бэру.

В дополнение к сформулированной теореме отметим, что условие (2) является точным: для любого $\alpha>0$ существуют такие ω-периодические системы (1), у которых имеется решение $x(\cdot)$, удовлетворяющее условию $\varlimsup\limits_{t\to+\infty}(\|x(t)\|/t)\ge\alpha$, и ω-периодические решения отсутствуют.

Литература

1. Massera J.L. *The existence of periodic solutions of systems of differential equations* // Duke Math. J. 1950. V. 17. № 4. P. 457–475.

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ ПАРЫ ИНДЕКСОВ УСТОЙЧИВОСТИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М.И. Зайдель

Для заданного натурального $n\ge 2$ рассмотрим множество $\mathcal{M}_n$ линейных дифференциальных систем

$$\dot{x}=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),\tag{1}$$

с непрерывными и ограниченными на полуоси $\mathbb{R}_+$ коэффициентами. Для краткости мы отождествляем систему (1) с матричнозначной функцией $A\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и пишем $A\in\mathcal{M}_n$.

Обозначим через $\mathrm{s}(A)$ индекс устойчивости системы $A\in\mathcal{M}_n$, т.е. размерность линейного подпространства её ограниченных решений, а через $\mathrm{es}(A)$ – индекс экспоненциальной устойчивости этой системы, т.е. размерность линейного подпространства её решений с отрицательными характеристическими показателями Ляпунова [1, с. 12].

В работе [2] О. Перрон построил пример системы $A\in\mathcal{M}_2$, индекс экспоненциальной устойчивости которой равен двум, и такого её непрерывного возмущения Q, экспоненциально убывающего к нулю на бесконечности, что оба индекса устойчивости возмущённой системы $A+Q\in\mathcal{M}_2$ равны единице, т.е. в примере Перрона имеет место потеря устойчивости.

Мы приведём обобщение этого эффекта, называемого теперь эффектом Перрона [3, гл. 4; 4], для чего для системы $A\in\mathcal{M}_n$ и метрического пространства M рассмотрим класс $\mathcal{E}_n[A](M)$ непрерывных по совокупности переменных матричнозначных функций $Q\colon\mathbb{R}_+\times M\to\mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющих оценке $\|Q(t,\mu)\|\le C_Q\exp(-\sigma_Q t)$ для всех $(t,\mu)\in\mathbb{R}_+\times M$, где C_Q и σ_Q – положительные постоянные (свои для каждой функции Q), и таких, что индексы устойчивости и экспоненциальной устойчивости системы $A+Q$, являющиеся функциями $\mu\in M$ и обозначаемые $\mathrm{s}(\cdot\,;A+Q)$ и $\mathrm{es}(\cdot\,;A+Q)$, не превосходят соответствующие индексы устойчивости системы A, т.е. $\mathrm{s}(\mu;A+Q)\le\mathrm{s}(A)$ и $\mathrm{es}(\mu;A+Q)\le\mathrm{es}(A)$ при всех $\mu\in M$.

Таким образом, ставится задача полного дескриптивно-функционального описания для каждого натурального числа $n \geq 2$ и метрического пространства M класса пар $\big((\mathrm{s}(A), \mathrm{es}(A)), \quad (\mathrm{s}(\cdot\,; A+Q), \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q))\big)$, составленных из индексов устойчивости системы A и индексов устойчивости семейства $A+Q$, когда A пробегает множество $\mathcal{M}_n$, а матричнозначная функция Q при каждом A – класс $\mathcal{E}_n[A](M)$, т.е. класса

$$\Sigma\mathcal{E}_n(M) \equiv \big\{\big((\mathrm{s}(A), \mathrm{es}(A)),\ (\mathrm{s}(\cdot\,; A+Q), \mathrm{es}(\cdot\,; A+Q))\big) \,|\, A \in \mathcal{M}_n,\ Q \in \mathcal{E}_n[A](M)\big\}.$$

Прежде чем сформулировать полученный результат, напомним, что функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется [5, с. 224] функцией класса $(F_\sigma, ^*)$, если для любого $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}\big((r, +\infty)\big)$ луча $(r, +\infty)$ является F_σ-множеством пространства M, т.е. представляется в виде счётного объединения его замкнутых подмножеств. В частности, класс $(F_\sigma, ^*)$ – подкласс второго класса Бэра [5, с. 249]. Кроме того, будем обозначать через $\mathcal{Z}_n$ множество $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Решение поставленной задачи даёт

Теорема. *Пусть n – натуральное число, большее единицы, и M – метрическое пространство. Пара $\big((\alpha_0, \beta_0), (\alpha(\cdot), \beta(\cdot)\big)$, где $\alpha_0, \beta_0 \in \mathcal{Z}_n$ и $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)\colon M \to \mathcal{Z}_n$, принадлежит классу $\Sigma\mathcal{E}_n(M)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $\alpha_0 \geq \beta_0$;

2) $\alpha(\mu) \geq \beta(\mu)$ для всех $\mu \in M$;

3) $\alpha(\mu) \leq \alpha_0$, $\beta(\mu) \leq \beta_0$ для всех $\mu \in M$;

4) функции $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ принадлежат классу $(F_\sigma, *)$.

Пусть M – метрическое пространство. Для заданного $n \geq 2$ рассмотрим семейство

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu \in M$ определённая на временно́й полуоси $\mathbb{R}_+$ матричнозначная функция $\mathcal{A}(\cdot, \mu)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна и ограничена (при каждом μ, вообще говоря, своей постоянной).

Обычно семейство отображений $\mathcal{A}(\cdot, \mu)$, $\mu \in M$, рассматривают при одном из следующих двух естественных предположений: это семейство непрерывно либо **а)** в компактно-открытой топологии, либо **б)** в равномерной топологии. Условие **а)** равносильно тому, что если последовательность $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек из M сходится к точке μ_0, то последовательность матриц $\mathcal{A}(t, \mu_k)$ сходится к матрице $\mathcal{A}(t, \mu_0)$ при $k \to +\infty$ равномерно на каждом отрезке $[0, T] \subset \mathbb{R}_+$, а условие **б)** – что эта сходимость равномерна на всей полуоси $\mathbb{R}_+$. Класс семейств (2), непрерывных в указанном выше смысле в компактно-открытой топологии, обозначим через $\mathcal{C}^n(M)$, а непрерывных в равномерной топологии – через $\mathcal{U}^n(M)$. Очевидно включение $\mathcal{U}^n(M) \subset \mathcal{C}^n(M)$. Далее мы отождествляем семейство (2) и задающую его матричнозначную функцию $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ и поэтому пишем $\mathcal{A} \in \mathcal{C}^n(M)$ или $\mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)$.

Следствие. *Пусть M – метрическое пространство, и пусть $n \geq 2$. Классы пар функций $\Sigma\mathcal{C}_n(M) \equiv \{(\mathrm{s}(\cdot\,; \mathcal{A}), \mathrm{es}(\cdot\,; \mathcal{A})) \,|\, \mathcal{A} \in \mathcal{C}^n(M)\}$ и $\Sigma\mathcal{U}_n(M) \equiv \{(\mathrm{s}(\cdot\,; \mathcal{A}), \mathrm{es}(\cdot\,; \mathcal{A})) \,|\, \mathcal{A} \in \mathcal{U}^n(M)\}$ совпадают между собой и состоят из пар $(\alpha(\cdot), \beta(\cdot))$ функций $M \to \mathcal{Z}_n$, принадлежащих классу $(F_\sigma, *)$ и удовлетворяющих неравенству $\alpha(\mu) \geq \beta(\mu)$ при всех $\mu \in M$.*

Замечание. Описание классов, составленных из вторых элементов пар классов $\Sigma\mathcal{C}_n(M)$ и $\Sigma\mathcal{U}_n(M)$, получено в работе [6]: указанные классы совпадают между собой и состоят из функций $M \to \mathcal{Z}_n$ класса $(F_\sigma, *)$.

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Мн.: БГУ, 2006.
2. Perron O. *Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme* // Math. Zeitschr. 1930. V. 31. № 5. P. 748–766.
3. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения.* М., Ижевск: РХД, 2006.
4. Коровин С. К., Изобов Н. А. *Реализация эффекта Перрона смены значений характеристических показателей решений дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1536–1550.
5. Хаусдорф Ф. *Теория множеств.* М. – Л.: ОНТИ, 1937.
6. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание индекса экспоненциальной устойчивости линейных параметрических систем как функции параметра* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 10. С. 1307–1318. (Поправка: *Письмо в редакцию* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 12. С. 1726.)

АНТИПЕРРОНОВСКИЙ ВАРИАНТ СМЕНЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА У ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Н. А. Изобов, А. В. Ильин

Рассматриваем линейные дифференциальные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^2, \quad t \geq t_0, \tag{1}$$

с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, являющиеся линейными приближениями для нелинейных систем

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in R^2, \quad t \geq t_0. \tag{2}$$

У этих систем m-возмущения $f(t,y)$ также являются бесконечно дифференцируемыми и имеют порядок $m > 1$ малости в окрестности начала координат $y = 0$ и допустимого роста вне её:

$$\|f(t,y)\| \leq C_f \|y\|^m, \quad m > 1, \quad C_f = \text{const}, \quad y \in R^2, \quad t \geq t_0. \tag{3}$$

Эффект Перрона [1] устанавливает смену отрицательных характеристических показателей системы (1) на положительные значения у части решений системы (2) (с $m = 2$) и сохранение отрицательных показателей у решений оставшейся непустой части. Исследованию этого эффекта Перрона, в том числе и полного его варианта, посвящена серия наших работ (и в частности, совместных с С.К. Коровиным), завершившаяся полным описанием [2, 3] суслинскими множествами совокупностей как положительных, так и отрицательных (и при их отсутствии) показателей всех нетривиальных решений системы (2) с возмущением (3).

Для возможных приложений бóльший интерес представляет противоположный антиперроновский эффект существования n-мерных системы линейного приближения со всеми положительными характеристическими показателями и возмущенной системы с возмущением соответствующего класса, имеющей нетривиальные решения с отрицательными показателями Ляпунова. Этот эффект для n-мерных дифференциальных систем исследован нами в случае линейных экспоненциально убывающих [4] и исчезающих на бесконечности [5] возмущений.