ВЕРХНИЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА

А.Ф. Касабуцкий, Е.И. Фоминых

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на временно́й полуоси $t \geq 0$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)\colon [0, +\infty) \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathcal{M}_n$ совокупность всех таких линейных систем, а через $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$ показатели Ляпунова системы (1).

Пусть $\sigma_1(t) \geq \ldots \geq \sigma_n(t)$ – сингулярные числа какой-либо фундаментальной матрицы $X(t)$, $t \geq 0$, системы (1). Величина

$$\overline{\sigma}_k(A) = \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1} \ln \sigma_{n-k+1}(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

называется k*-м верхним сингулярным показателем* системы (1), его называют также её $(n-k+1)$*-й ляпуновской экспонентой* [1, с. 43]. В [2] показано, в частности, что сингулярные показатели (2) не зависят от выбора фундаментальной матрицы $X(\cdot)$ системы (1) и являются инвариантами преобразования Ляпунова. Геометрически число $\overline{\sigma}_k(A)$ – это точная верхняя граница изменения при $t \to +\infty$ показателей $(n-k+1)$-х главных полуосей эллипсоидов, являющихся образами единичной евклидовой сферы семейства линейных отображений $X(t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, порождаемых решениями системы (1).

С общей точки зрения отличие верхних сингулярных показателей от показателей Ляпунова состоит в том, что первые являются асимптотическими характеристиками семейства линейных отображений $X(t)$, $t \geqslant 0$, в то время как вторые – это асимптотические характеристики её индивидуальных решений. Из теоремы Ляпунова и обобщённой теоремы Куранта–Фишера вытекает, что вычисление показателей Ляпунова и верхних сингулярных показателей отличаются друг от друга только порядком выполнения предельных переходов. Полное описание взаимного расположения сингулярных показателей и показателей Ляпунова системы (1) получено в работе [3]: $\overline{\sigma}_k(A) \leq \lambda_k(A)$, если $k < n$, и $\overline{\sigma}_n(A) = \lambda_n(A)$, и указанными соотношениями исчерпываются все соотношения между этими показателями систем из $\mathcal{M}_n$.

Пусть M – метрическое пространство. Для заданного $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство

$$\dot{x} = \mathcal{A}(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

линейных дифференциальных систем, зависящих от параметра $\mu \in M$, такое, что при каждом фиксированном $\mu \in M$ определённая на временно́й полуоси матричнозначная функция $\mathcal{A}(\cdot, \mu)\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ непрерывна, ограничена (при каждом μ, вообще говоря, своей постоянной) и, если последовательность $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек из M сходится к точке μ_0, то последовательность функций $\mathcal{A}(\cdot, \mu_k)$ при $k \to +\infty$ сходится к функции $\mathcal{A}(\cdot, \mu_0)$ равномерно на всей полуоси $t \geq 0$ (такое семейство далее называем *равномерным семейством* $\mathcal{A}$). При каждом фиксированном в семействе $\mathcal{A}$ значении $\mu \in M$ получаем линейную дифференциальную систему с непрерывными ограниченными на полуоси коэффициентами, верхние сингулярные показатели которой обозначим через $\overline{\sigma}_1(\mu; \mathcal{A}) \leq \ldots \leq \overline{\sigma}_n(\mu; \mathcal{A})$, а значит, для каждого $k = 1, \ldots, n$ определена функция $\overline{\sigma}_k(\cdot\,; \mathcal{A})\colon M \to \mathbb{R}$, которую назовём k*-ым верхним сингулярным показателем семейства* $\mathcal{A}$. Естественно, возникает вопрос, что́ представляет собой каждая из функций

$\overline{\sigma}_k(\cdot\,;\mathcal{A})$, $k=1,\ldots,n$, для равномерного семейства $\mathcal{A}$. Свойства, которым удовлетворяют эти функции, содержит

Теорема 1. *Для каждых натурального $n\geq 2$ и метрического пространства M верхний сингулярный показатель $\overline{\sigma}_k(\cdot\,;\mathcal{A})$, $k=1,\ldots,n$, семейства $\mathcal{A}$ является функцией класса $(^*,G_\delta)$, имеющей непрерывные миноранту и мажоранту.*

Так как $\lambda_n(A)=\overline{\sigma}_n(A)$, то приведённые свойства показатель $\overline{\sigma}_n(\cdot\,;\mathcal{A})$ характеризуют полностью, как это следует из [4] или [5]. Для остальных верхних сингулярных показателей вопрос о том, дают ли эти свойства полное описание этих показателей для равномерных семейств, остаётся открытым. Доказано только следующее частичное обращение теоремы 1.

Теорема 2. *Для каждых натуральных $n\geq 2$, фиксированного $k\leq n$, метрического пространства M и полунепрерывной сверху функции $f\colon M\to\mathbb{R}$, имеющей непрерывные миноранту и мажоранту, существует такое равномерное семейство $\mathcal{A}$, для которого $\overline{\sigma}_k(\mu;\mathcal{A})=f(\mu)$ при всех $\mu\in M$.*

Литература

1. Леонов Г. А. *Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости.* – М., Иж., 2006.

2. Барабанов Е. А., Фоминых Е. И. *Сингулярные показатели линейной дифференциальной системы и показатели её решений* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2005. № 1. С. 16–22.

3. Барабанов Е. А., Фоминых Е. И. *Описание взаимного расположения сингулярных показателей линейной дифференциальной системы и показателей её решений* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 12. С. 1587–1603.

4. Быков В. В. *Функции, определяемые показателями Ляпунова семейств линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси* // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 12. С. 1579–1592.

5. Барабанов Е. А., Быков В. В., Карпук М. В. *Полное описание спектров показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем, непрерывно зависящих от параметра равномерно на полуоси* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1579–1588.

ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ПОДВИЖНОСТИ СТАРШЕГО СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

А.А. Леваков, Д.А. Долженкова

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, d-мерное $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$. Рассмотрим стохастическую дифференциальную систему

$$dx(t)=A(t)x(t)dt+g(t,x(t))dW(t), \tag{1}$$

где $A:R_+\to R^{d\times d}$ и $g:R_+\times R^d\to R^{d\times d}$ $-$ непрерывные функции, кроме того, A $-$ ограниченная функция, g удовлетворяет глобальному условию Липшица по x. При этих условиях для любого $x_0\in R^d$ уравнение (1) имеет сильное решение с начальным условием x_0.

Число $\varrho(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\sup(2t)^{-1}\ln E(\|x(t)\|^2)$, где $E(\|x(t)\|^2)$ $-$ математическое ожидание случайной величины $\|x(t)\|^2$, называется верхним среднеквадратическим характеристическим показателем сильного решения $x(t)$ уравнения (1), а число $\sup\limits_{x\in A}\varrho(x)=\Lambda$, где Λ $-$ множество всех сильных решений уравнения (1) с начальными условиями $x_0\in R^d$, $-$ старшим среднеквадратическим показателем уравнения (1).