Число χ называется верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой функции g, удовлетворяющей условию $\|g(t,x)\| \le \delta\|x\| \ \ \forall(t,x) \in R_+ \times R^d$, старший среднеквадратический показатель системы (1) не превосходит $\chi + \varepsilon$.

Число $\bar{\chi}$ называется достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического характеристического показателя системы (1), если оно является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя и для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется система (1) с функцией g, удовлетворяющей неравенству $\|g(t,x)\| \le \delta\|x\| \ \ \forall(t,x) \in R_+ \times R^d$, и со старшим среднеквадратическим показателем, не меньшим чем $\bar{\chi} - \varepsilon$.

Теорема. *Старший центральный показатель системы*

$$dx(t) = A(t)x(t)dt \tag{2}$$

является верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1).

Старший центральный показатель диагональной системы (2) является достижимой верхней границей подвижности старшего среднеквадратического показателя системы (1).

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова* Минск: БГУ, 2006.

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МИЛЛИОНЩИКОВА С ГЛАДКОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ВЕЩЕСТВЕННОГО ПАРАМЕТРА

А.В. Липницкий

Рассмотрим однопараметрическое семейство линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A_\mu(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \ge 0 \tag{1_μ}$$

с матрицами $A_\mu(t) := \begin{cases} d_k(\mu)\,\mathrm{diag}\,[1,-1], & 2k-2 \le t < 2k-1, \\ (\mu + \gamma(\mu) + b_k)J, & 2k-1 \le t < 2k, \end{cases}$ где $k \in \mathbb{N}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, и вещественным параметром μ; условия, которым удовлетворяют числа $b_k \in \mathbb{R}$ и непрерывные π-периодические функции $d_k(\cdot), \gamma(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, будут указаны ниже.

В работах [1–4] исследовался случай, когда $d_k(\mu)$ и $\gamma(\mu)$ не зависят от μ и выполнено условие $d_k(\mu) \equiv d_k \ge d > 0$, $k \in \mathbb{N}$. При этом в [1] установлено отсутствие равномерных по μ оценок нормы решений системы (1_μ), а в [2] при наложении ограничения $d > 2^{10}$ доказана положительность старшего показателя Ляпунова системы (1_μ), рассматриваемого как функция параметра μ, на множестве положительной меры Лебега.

В работах [3, 4] сделана попытка перенести указанный результат на общий случай, однако теорема из [3] неверна, а доказательство теоремы 2 из [4] также содержит ошибки.

Пусть $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ – произвольные числа. Рассмотрим случай, когда выполнены условия

$$d_k(\mu) \equiv d(\mu) > 0, \quad b_{2^{n-1}} = \alpha_n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим через $X_{A_\mu}(t,s)$, $t,s \geq 0$, матрицу Коши системы (1_μ). Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ матрицу поворота на угол φ по часовой стрелке обозначим через $U(\varphi) \equiv \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Можно показать, что в случае, когда матрица $A_\mu(\cdot)$ определяется условиями (2), для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $X_{A_\mu}(2^{k+1},0) = U(\alpha_{k+1}-\alpha_k)X^2_{A_\mu}(2^k,0)$.

Системы с коэффициентами, выбранными согласно (2), обладают рядом свойств, позволяющих строить однопараметрические семейства с различными асимптотическими характеристиками. В частности, если последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ сходится, то матрица $A_\mu(\cdot)$ есть равномерный по $t \geq 0$ предел последовательности периодических матриц. В.М. Миллионщиков использовал такие системы в работах [5, 6] (см. также [7]) для доказательства существования неправильных по Ляпунову линейных дифференциальных систем с предельно периодическими и квазипериодическими коэффициентами.

В работе [8] при выполнении условий (2) и в случае, когда $d(\cdot)$ – произвольная непрерывная функция, а $\gamma(\cdot) \equiv 0$, доказано существование такого значения параметра $\mu \in \mathbb{R}$, при котором соответствующая система (1_μ) неустойчива. В настоящем докладе установлена положительность старшего показателя Ляпунова системы (1_μ) на множестве значений параметра положительной меры Лебега при условии дифференцируемости на $\mathbb{R}$ функций $d(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ и выполнения неравенства

$$\tilde{C} := \inf_{\mu\in\mathbb{R}}(1+\gamma'(\mu)) > 2|d'(\mu)|e^{4d(\mu)}, \quad \mu \in \mathbb{R} \tag{3}$$

и оценки

$$\int\limits_0^\pi d(\mu)\,d\mu > 2^{10}(1+\tilde{C}^{-1}). \tag{4}$$

Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathbb{R}$ определим рекуррентно вещественные числа $\eta_k = = \eta_k(\mu) \geq 1$ и $\psi_k = \psi_k(\mu)$ следующим образом. Обозначим $\eta_1(\mu) = e^{d(\mu)}$, $\psi_1(\mu) :\equiv 0$, $\xi_k = \xi_k(\mu) := 2\psi_k(\mu)+\alpha_k+\mu+\gamma(\mu)$, $q_k(\mu) := 2\pi[2^{-1}\pi^{-1}\xi_k(\mu)]$ ($[\cdot]$ обозначает целую часть числа). Поскольку $\eta_k \geq 1$ и, следовательно $\operatorname{sh}(2\ln\eta_k) \geq 0$, найдутся единственные $1 \leq \eta_{k+1} \in \mathbb{R}$ и $\varphi_k = \varphi_k(\mu) \in [q_k(\mu)-2^{-1}\pi, q_k(\mu)+2^{-1}\pi)$, такие что выполнены равенства

$$sh\ \ln\eta_{k+1} = (\operatorname{sh}(2\ln\eta_k))|\cos\xi_k|,$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_k = (\operatorname{ch}(2\ln\eta_k))\operatorname{ctg}\xi_k \text{ если } \sin\xi_k \neq 0, \quad \varphi_k = \xi_k \text{ в случае когда } \sin\xi_k = 0.$$

Наконец, полагаем $\psi_{k+1}(\mu) := \psi_k(\mu) + 2^{-1}\varphi_k(\mu) + \dfrac{\pi}{2}\beta(\mu)$, где $\beta(\mu) = 0$ если $\xi_k(\mu) \in \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[2\pi n - 2^{-1}\pi, 2\pi n + 2^{-1}\pi)$, $\beta(\mu) = 1$ для всех остальных $\mu \in \mathbb{R}$.

Далее всюду будем предполагать выполненными условия (2) и (3).

Лемма 1. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ функции η_k и ψ_k дифференцируемы по μ и имеет место представление*

$$X_{A_\mu}(2^n-1,0) = U(\psi_n)\begin{pmatrix} \eta_n & 0 \\ 0 & \eta_n^{-1} \end{pmatrix}U(\psi_n).$$

Лемма 2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенство*

$$\psi_k(\pi) - \psi_k(0) = (2^{k-1}-2^{-1})\pi.$$

и для всех $\mu \in \mathbb{R}$ оценка

$$\psi_k'(\mu) > 0.$$

Лемма 3. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^{\pi} \ln|\cos \xi_k(\mu)|\, d\mu \geq -2^5 k - 2\pi \ln(1 + \tilde{C}^{-1}).$$

Теорема. *Старший характеристический показатель* $\lambda_2(A_\mu)$ *системы* (1_μ) *при выполнении условий (2)–(4) положителен для всех* μ *из некоторого множества* J *положительной меры Лебега.*

Литература

1. Липницкий А.В. *Оценки снизу нормы решений линейных дифференциальных систем с линейным параметром* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 412–416.

2. Липницкий А.В. *О положительности старшего показателя Ляпунова в однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1095–1101.

3. Липницкий А.В. *Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 171–177.

4. Липницкий А.В. *О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра* // Доклады НАН Беларуси. 2019. Т. 63, № 3. С. 270–277.

5. Миллионщиков В.М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 3. С. 391–396.

6. Миллионщиков В.М. *Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10, № 3. С. 569.

7. Липницкий А.В. *О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1615–1620.

8. Липницкий А.В. *О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова с непрерывной зависимостью от вещественного параметра* // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 4. С. 470–476.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ НОРМИРОВАННЫХ РАЗБИЕНИЙ МАТРИЦЫ КОШИ

Е.К. Макаров

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leq M < +\infty$ для всех $t \geq 0$. Обозначим матрицу Коши системы (1) через X_A, а ее старший показатель через $\lambda_n(A)$.

Определение 1. Пусть τ – возрастающая последовательность $t_0 < t_1 < \ldots < t_{s+1}$, состоящая из $s+2$ вещественных чисел. Выражение

$$P_A(\tau) = \prod_{i=0}^{s} \|X_A(t_{i+1}, t_i)\|$$

будем называть нормированным разбиением матрицы Коши для системы (1).