

Лемма 3. Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\int_0^\pi \ln |\cos \xi_k(\mu)| d\mu \geq -2^5 k - 2\pi \ln(1 + \tilde{C}^{-1}).$$

Теорема. Старший характеристический показатель $\lambda_2(A_\mu)$ системы (1_μ) при выполнении условий (2)–(4) положителен для всех μ из некоторого множества J положительной меры Лебега.

Литература

1. Липницкий А.В. Оценки снизу нормы решений линейных дифференциальных систем с линейным параметром // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 412–416.
2. Липницкий А.В. О положительности старшего показателя Ляпунова в однопараметрических семействах линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1095–1101.
3. Липницкий А.В. Оценки снизу старшего характеристического показателя в однопараметрических семействах систем Миллионщикова // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 171–177.
4. Липницкий А.В. О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова, зависящих от вещественного параметра // Доклады НАН Беларуси. 2019. Т. 63, № 3. С. 270–277.
5. Миллионщиков В.М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с почти-периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 3. С. 391–396.
6. Миллионщиков В.М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 11. С. 1979–1983; 1974. Т. 10, № 3. С. 569.
7. Липницкий А.В. О решении В.М. Миллионщиковым проблемы Еругина // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 12. С. 1615–1620.
8. Липницкий А.В. О неустойчивости линейных дифференциальных систем Миллионщикова с непрерывной зависимостью от вещественного параметра // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 4. С. 470–476.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ НОРМИРОВАННЫХ РАЗБИЕНИЙ МАТРИЦЫ КОШИ

Е.К. Макаров

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с кусочно-непрерывной и ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leq M < +\infty$ для всех $t \geq 0$. Обозначим матрицу Коши системы (1) через X_A , а ее старший показатель через $\lambda_n(A)$.

Определение 1. Пусть τ – возрастающая последовательность $t_0 < t_1 < \dots < t_{s+1}$, состоящая из $s + 2$ вещественных чисел. Выражение

$$P_A(\tau) = \prod_{i=0}^s \|X_A(t_{i+1}, t_i)\|$$

будем называть нормированным разбиением матрицы Коши для системы (1).

Нормированные разбиения широко распространены в теории показателей Ляпунова. Формулы для вычисления центрального [1, с. 48]

$$\Omega(A) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{k=1}^m \ln \|X_A(kT, kT - T)\|$$

и экспоненциального показателя [1, с. 57]

$$\nabla_0(A) = \lim_{\theta \rightarrow 1+0} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta^m} \sum_{k=1}^m \ln \|X_A(\theta^k, \theta^{k-1})\|,$$

содержат выражения вида $\Xi_A(\tau) = \ln P_A(\tau)$ при некоторых подходящих τ . Старший сигма-показатель [1, с. 214] (показатель Изобова) системы (1), определяемый равенствами $\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \xi_m(\sigma)$, $\xi_m(\sigma) = \max_{i < m} (\ln \|X_A(m, i)\| + \xi_i(\sigma) - \sigma i)$, $\xi_1 = 0$, $i \in \mathbb{N}$, можно представить [2] в эквивалентной форме

$$\nabla_\sigma(A) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \max_{\tau \in \mathcal{D}_0(m)} (\Xi_A(\tau) - \sigma \|\tau\|_i), \quad (2)$$

где $\mathcal{D}_0(m)$ – множество всех возрастающих последовательностей $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{s+1} = m$ целых чисел с не менее чем двумя членами и $\|\tau\|_i = t_1 + \dots + t_s$.

Зафиксируем некоторый замкнутый выпуклый конус $K \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $K \cap (-K) = \{0\}$. Линейный функционал $\mu \in (\mathbb{R}^n)^*$ называется положительным на K , если $\mu(x) \geq 0$ для всех $x \in K$. Сопряженный к K конус, т.е. множество K^+ всех положительных на K линейных функционалов будем обозначать через K^+ .

Определение 2. [3, с. 83] Пусть $y : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ – произвольное отображение. Линейный функционал $\lambda \in (\mathbb{R}^n)^*$ называется характеристическим функционалом отображения y относительно конуса K , если для всех $\mu \in K^+$, $\mu \neq 0$, выполнено неравенство

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|x\|^{-1} (\lambda x + \mu x + \ln \|y(x)\|) > 0$$

и при этом

$$\limsup_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|x\|^{-1} (\lambda x + \ln \|y(x)\|) = 0.$$

Множество $\mathcal{M}[y]$ всех характеристических функционалов отображения y называется его характеристическим множеством.

Определение 3. Модифицированным характеристическим показателем отображения y называется функция $\psi[y] : K \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемая равенством $\psi[y](x) := \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln \|y(tx)\|$.

Существует взаимосвязь между модифицированными характеристическими показателями и характеристическими функционалами. В [4] было доказано, что если $\ln \|y\|$ – липшицева функция, то $\mathcal{M}[y] = \mathcal{M}[\exp \psi[y]]$.

Пусть $t_0 = 0$. Зафиксируем некоторое $k \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательности $0 < t_1 < \dots < t_{k+1}$ вещественных чисел с $k+1$ элементами как векторы $(t_1, \dots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Полагая $K = \{\tau = (t_1, \dots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} : 0 \leq t_1 < \dots \leq t_{k+1}\}$, определим множество $\mathcal{M}[P_A]$ и функцию

$$\Psi_A(\tau) = \psi[P_A](\tau) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln P_A(t\tau)$$

согласно определениям 2 и 3.

Предложение 1. *Имеет место равенство $\mathcal{M}[P_A] = \mathcal{M}[\exp \Psi_A]$.*

Предложение 2. *Пусть $\lambda \in \mathcal{M}[\Psi_A]$. Если для некоторой последовательности векторов $\tau_j \in K$ такой, что $\|\tau_j\| \rightarrow \infty$ и $\tau_j \|\tau_j\|^{-1} \rightarrow \xi^0 \in K$ при $j \rightarrow \infty$, имеем равенство*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tau_j\|^{-1} (\lambda \tau_j + \ln P_A(\tau_j)) = 0,$$

то $\lambda \xi^0 + \Psi_A(\xi^0) = 0$ и $\lambda \xi + \Psi_A(\xi) \geq 0$ для всех $\xi \in K$.

Мы не можем использовать эти результаты для вычисления $\nabla_\sigma(A)$, так как длина последовательности τ в (2) может неограниченно возрастать с увеличением m . Однако мы можем применить предложения 1 и 2 для получения некоторой информации о конечно-точечных приближениях $\nabla_\sigma(A)$. Пусть $\mathcal{D}_0^k(m)$ – подмножество $\mathcal{D}_0(m)$, содержащее последовательности с не более чем k элементами.

Определение 4. Число $\nabla_\sigma^k(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \max_{\tau \in \mathcal{D}_0^k(m)} (\Xi_A(\tau) - \sigma \|\tau\|_i)$ будем называть k -точечным приближением для $\nabla_\sigma(A)$.

Предложение 3. *Если $(\sigma, \mu) \in \mathbb{R}^2$ является крайней точкой надграфика $\nabla_\sigma^k(A)$, то вектор $(-\sigma, \dots, -\sigma, -\mu) \in (\mathbb{R}^{k+1})^*$ является характеристическим вектором для P_A .*

Следствие. *Если $(\sigma, \mu) \in \mathbb{R}^2$ является экстремальной точкой для надграфика $\nabla_\sigma^k(A)$, то*

$$\sigma \sum_{i=1}^k \xi_i + \mu \xi_{k+1} \leq \Psi_A(\xi)$$

для всех $\xi \in K$ и существует некоторое $\xi^0 \in K$ такое, что

$$\sigma \sum_{i=1}^k \xi_i^0 + \mu \xi_{k+1}^0 = \Psi_A(\xi^0).$$

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова*. Минск: БГУ, 2006.
2. Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В. *Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 215–224.
3. Гайшун И. В. *Линейные уравнения в полных производных*. Минск: Наука и техника. 1989.
4. Макаров Е. К. *О взаимосвязи между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 3. С. 393–399.

ОБ ОТКРЫТОСТИ ПОЛНОГО СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С.Н. Попова, М.В. Федорова

Рассмотрим линейную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с вполне ограниченной [1] на $\mathbb{Z}$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) обозначим через $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$. Всюду считаем,