согласно определениям 2 и 3.

Предложение 1. *Имеет место равенство* $\mathcal{M}[P_A] = \mathcal{M}[\exp\Psi_A]$.

Предложение 2. *Пусть* $\lambda \in \mathcal{M}[\Psi_A]$ *. Если для некоторой последовательности векторов* $\tau_j \in K$ *такой, что* $\|\tau_j\| \to \infty$ *и* $\tau_j\|\tau_j\|^{-1} \to \xi^0 \in K$ *при* $j \to \infty$ *, имеем равенство*

$$\lim_{j\to\infty} \|\tau_j\|^{-1}(\lambda\tau_j + \ln P_A(\tau_j)) = 0,$$

то $\lambda\xi^0 + \Psi_A(\xi^0) = 0$ *и* $\lambda\xi + \Psi_A(\xi) \geq 0$ *для всех* $\xi \in K$ *.*

Мы не можем использовать эти результаты для вычисления $\nabla_\sigma(A)$, так как длина последовательности τ в (2) может неограниченно возрастать с увеличением m . Однако мы можем применить предложения 1 и 2 для получения некоторой информации о конечно-точечных приближениях $\nabla_\sigma(A)$. Пусть $\mathcal{D}_0^k(m)$ – подмножество $\mathcal{D}_0(m)$, содержащее последовательности с не более чем k элементами.

Определение 4. Число $\nabla_\sigma^k(A) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1} \max\limits_{\tau\in\mathcal{D}_0^k(m)} (\Xi_A(\tau) - \sigma\|\tau\|_{\mathrm{i}})$. будем называть k -точечным приближением для $\nabla_\sigma(A)$.

Предложение 3. *Если* $(\sigma,\mu) \in \mathbb{R}^2$ *является крайней точкой надграфика* $\nabla_\sigma^k(A)$ *, то вектор* $(-\sigma,\ldots,-\sigma,-\mu) \in (\mathbb{R}^{k+1})^*$ *является характеристическим вектором для* P_A *.*

Следствие. *Если* $(\sigma,\mu) \in \mathbb{R}^2$ *является экстремальной точкой для надграфика* $\nabla_\sigma^k(A)$ *, то*

$$\sigma\sum_{i=1}^{k}\xi_i + \mu\xi_{k+1} \leq \Psi_A(\xi)$$

для всех $\xi \in K$ *и существует некоторое* $\xi^0 \in K$ *такое, что*

$$\sigma\sum_{i=1}^{k}\xi_i^0 + \mu\xi_{k+1}^0 = \Psi_A(\xi^0).$$

Литература

1. Изобов Н. А. *Введение в теорию показателей Ляпунова.* Минск: БГУ, 2006.

2. Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В. *Об оценке сверху для старшего показателя линейной дифференциальной системы с интегрируемыми на полуоси возмущениями* // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 215–224.

3. Гайшун И. В. *Линейные уравнения в полных производных.* Минск: Наука и техника. 1989.

4. Макаров Е. К. *О взаимосвязи между характеристическими функционалами и слабыми характеристическими показателями* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 3. С. 393–399.

ОБ ОТКРЫТОСТИ ПОЛНОГО СПЕКТРА ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

С.Н. Попова, М.В. Федорова

Рассмотрим линейную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = A(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

с вполне ограниченной [1] на $\mathbb{Z}$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) обозначим через $\lambda(A) = \big(\lambda_1(A),\ldots,\lambda_n(A)\big)$. Всюду считаем, что полный спектр показателей Ляпунова этой и каждой рассматриваемой ниже системы n-го порядка принадлежит множеству $\mathbb{R}^n_{\leqslant}$ упорядоченных по неубыванию наборов n чисел.

Наряду с системой (1) рассмотрим мультипликативно возмущенную систему

$$y(k+1) = \big(A(k)R(k)\big)y(k), \quad k \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где матрица возмущений $R\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ также предполагается вполне ограниченной. Для этой системы определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(AR) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}$. Систему (2) отождествим с матрицей возмущений $R(\cdot)$. Множество всех возмущенных систем вида (2) обозначим через $\mathcal{R}$. Пусть $\mathcal{R}_\delta$ — его подмножество, отвечающее возмущениям $R(\cdot)$, для которых справедлива оценка $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|R(k) - E\| < \delta$ с фиксированным $\delta > 0$; здесь $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — единичная матрица. Обозначим

$$\lambda(\mathcal{R}_\delta) \doteq \big\{\lambda(AR)\colon R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta\big\}.$$

Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{O}_\varepsilon\big(\lambda(A)\big) \doteq \big\{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_{\leqslant}\colon \max_{j=1,\ldots,n} |\mu_j - \lambda_j(A)| < \varepsilon\big\}.$$

Определение. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *открытым*, если отображение $R(\cdot) \mapsto \lambda(AR)$ открыто в точке $R(k) \equiv E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\mathcal{O}_\delta\big(\lambda(A)\big) \subset \lambda(\mathcal{R}_\varepsilon)$.

Теорема. *Полный спектр показателей Ляпунова каждой двумерной системы вида* (1) *открыт.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

Литература

1. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА МЕРЫ УСТОЙЧИВОСТИ И МЕРЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И.Н. Сергеев

В докладе вводится новое понятие, содержательно развивающее понятия устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы и допускающее естественную вероятностную интерпретацию, хотя формально никак не использующее стохастическую терминологию и вообще не связанное со случайностью.

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+, G). \tag{1}$$

Положим $B_\rho = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| < \rho\}$ и $\rho_0 \equiv \sup\{\rho \mid B_\rho \subset G\}$, а через $x(\cdot, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0,x_0) = x_0$.