

что полный спектр показателей Ляпунова этой и каждой рассматриваемой ниже системы n -го порядка принадлежит множеству $\mathbb{R}_{\leq}^n$ упорядоченных по неубыванию наборов n чисел.

Наряду с системой (1) рассмотрим мультипликативно возмущенную систему

$$y(k+1) = (A(k)R(k))y(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

где матрица возмущений $R: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ также предполагается вполне ограниченной. Для этой системы определен полный спектр показателей Ляпунова $\lambda(AR) \in \mathbb{R}_{\leq}^n$. Систему (2) отождествим с матрицей возмущений $R(\cdot)$. Множество всех возмущенных систем вида (2) обозначим через $\mathcal{R}$. Пусть $\mathcal{R}_\delta$ — его подмножество, отвечающее возмущениям $R(\cdot)$, для которых справедлива оценка $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \|R(k) - E\| < \delta$ с фиксированным $\delta > 0$; здесь $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. Обозначим

$$\lambda(\mathcal{R}_\delta) \doteq \{\lambda(AR): R(\cdot) \in \mathcal{R}_\delta\}.$$

Кроме того, для произвольного $\varepsilon > 0$ введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A)) \doteq \{\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}_{\leq}^n: \max_{j=1, \dots, n} |\mu_j - \lambda_j(A)| < \varepsilon\}.$$

Определение. Полный спектр показателей Ляпунова системы (1) называется *открытым*, если отображение $R(\cdot) \mapsto \lambda(AR)$ открыто в точке $R(k) \equiv E \in \mathbb{R}^{n \times n}$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\mathcal{O}_\varepsilon(\lambda(A)) \subset \lambda(\mathcal{R}_\delta)$.

Теорема. *Полный спектр показателей Ляпунова каждой двумерной системы вида (1) открыт.*

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания № 075-01483-23-00, проект FEWS-2020-0010.

Литература

1. Демидович В. Б. *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений* // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА МЕРЫ УСТОЙЧИВОСТИ И МЕРЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И. Н. Сергеев

В докладе вводится новое понятие, содержательно развивающее понятия устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы и допускающее естественную вероятностную интерпретацию, хотя формально никак не использующее стохастическую терминологию и вообще не связанное со случайностью.

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in G, \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+, G). \quad (1)$$

Положим $B_\rho = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| < \rho\}$ и $\rho_0 \equiv \sup\{\rho \mid B_\rho \subset G\}$, а через $x(\cdot, x_0)$ будем обозначать непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x(0, x_0) = x_0$.

Определение 1. Скажем, что система (1) (точнее, её нулевое решение, о чём мы в дальнейшем больше не будем упоминать) обладает следующим свойством *ляпуновского, перроновского или верхнепредельного* типа – при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно:

1) [1, 2] *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ удовлетворяет соответственно требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| < \varepsilon, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| < \varepsilon; \quad (2)$$

2) [1, 2] *полной неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_0)$, что любое начальное значение $x_0 \in B_\delta$ не удовлетворяет соответствующему требованию (2) (в частности, возможно, решение $x(\cdot, x_0)$ определено не на всём луче $\mathbb{R}_+$);

3) (см. [2]) *почти устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_δ подмножество полной меры (здесь и ниже – Лебега);

4) (см. [2]) *почти полной неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_0)$, что все значения $x_0 \in B_\delta$, не удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_δ подмножество полной меры;

5) μ -*устойчивостью* при данном $\mu \in [0, 1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_0)$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все значения $x_0 \in B_\rho$, удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_ρ подмножество *относительной* меры $M_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ (т.е. долей от меры B_ρ), не меньшей μ ;

6) ν -*неустойчивостью* при данном $\nu \in [0, 1]$, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_0)$, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ все значения $x_0 \in B_\rho$, не удовлетворяющие соответствующему требованию (2), образуют в B_ρ подмножество *относительной* меры $N_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$, не меньшей ν .

Корректность определения 1 обосновывает

Теорема 1. Для любой системы (1), любого $\varepsilon > 0$ и каждого из требований (2) множества всех точек $x_0 \in G$, как удовлетворяющих этому требованию, так и не удовлетворяющих ему, измеримы.

Правомерность нижеследующего определения 2 обеспечивает

Теорема 2. Для любой системы (1) множество всех значений $\mu \in [0, 1]$ (равно как и всех значений $\nu \in [0, 1]$), для которых она обладает ляпуновской, перроновской или верхнепредельной μ -устойчивостью (соответственно, ν -неустойчивостью), заведомо содержит точку 0 и представляет собой промежуток, возможно, вырожденный в точку.

Определение 2. Для системы (1) при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовём *ляпуновской, перроновской или верхнепредельной* соответственно:

а) *мерой устойчивости* – такое число $\mu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\mu \in [0, \mu_\varkappa(f))$ система (1) обладает μ -устойчивостью, а для каждого $\mu \in (\mu_\varkappa(f), 1]$ не обладает ею;

б) *мерой неустойчивости* – такое число $\nu_\varkappa(f) \in [0, 1]$, что для каждого $\nu \in [0, \nu_\varkappa(f))$ система (1) обладает ν -неустойчивостью, а для каждого $\nu \in (\nu_\varkappa(f), 1]$ не обладает ею.

Конкретные формулы для мер устойчивости и неустойчивости предлагает

Теорема 3. Для каждой системы (1) однозначно определена шестёрка её ляпуновских, перроновских и верхнепредельных мер устойчивости или неустойчивости, которые соответственно задаются формулами

$$\mu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\rho \rightarrow +0} M_\varkappa(f, \varepsilon, \rho), \quad \nu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{\rho \rightarrow +0} N_\varkappa(f, \varepsilon, \rho), \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma, \quad (3)$$

причём в них пределы при $\varepsilon \rightarrow +0$ могут быть заменены точной нижней или, соответственно, верхней гранью по $\varepsilon > 0$.

Набор основных соотношений, связывающих различные меры устойчивости и неустойчивости, задаёт

Теорема 4. Для любой системы (1) выполнены неравенства

$$0 \leq \mu_\lambda(f) \leq \mu_\sigma(f) \leq \mu_\pi(f) \leq 1, \quad 0 \leq \nu_\pi(f) \leq \nu_\sigma(f) \leq \nu_\lambda(f) \leq 1,$$

$$0 \leq \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) \leq 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma.$$

Если в первом из равенств (3) нижний предел при $\rho \rightarrow +0$ заменить верхним, то полученная величина в сумме с мерой неустойчивости будет давать уже в точности 1 и, более того, она будет оценивать возможность выбора начального значения возмущённого решения с требованием (2) не снизу, а сверху.

Естественную связь почти устойчивости и почти полной неустойчивости с единичными значениями соответствующих мер раскрывает

Теорема 5. Система (1) обладает почти устойчивостью или почти полной неустойчивостью какого-либо типа тогда и только тогда, когда она обладает 1-устойчивостью или, соответственно, 1-неустойчивостью этого типа, и тогда её мера устойчивости того же типа равна 1, а неустойчивости — 0 или, соответственно, наоборот.

Ниже нас будут особенно интересовать стандартные подклассы систем (1), обладающих определёнными дополнительными свойствами, а именно:

- а) *одномерные* системы — в случае $n = 1$;
- б) *автономные* системы — их правые части не зависят от t ;
- в) *линейные* однородные системы — с правыми частями вида $A(t)x$, где $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ и $G \equiv \mathbb{R}^n$, в частности, *ограниченные* или *скалярные* — для них соответственно имеем

$$\|A\| \equiv \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |A(t)| < +\infty \quad \text{или} \quad A(t) = a(t)I, \quad a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Указанная в теореме 5 логическая связь между конкретными свойствами и мерами оказывается лишь односторонней, что и подтверждает

Теорема 6. При $n = 2$ существуют две автономные системы вида (1), не обладающие ни почти устойчивостью, ни почти полной неустойчивостью ни одного из трёх типов: у одной из них меры устойчивости или неустойчивости всех трёх типов равны соответственно 1 или 0, а у другой — наоборот.

В линейном случае ляпуновские и верхнепредельные меры могут принимать лишь свои крайние значения, заведомо реализуемые также и на перроновских мерах, — это и устанавливают следующие две теоремы.

Теорема 7. Для любой линейной системы (1) возможны только следующие две ситуации, причём в формулах (3) для всех упоминаемых в них мер устойчивости и неустойчивости нижние пределы при $\rho \rightarrow +0$ являются точными:

- 1) либо выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = \mu_\pi(f) = 1 > 0 = \nu_\pi(f) = \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f)$$

и система (1) обладает устойчивостью всех трёх типов;

- 2) либо выполнены соотношения

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) = 0 < 1 = \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f)$$

и система (1) обладает ляпуновской и верхнепредельной полной или почти полной неустойчивостью.

Теорема 8. При любом $n \in \mathbb{N}$ каждая из перечисленных в теореме 7 ситуаций реализуется на некоторой ограниченной скалярной линейной системе вида (1), причём вторая ситуация реализуется по меньшей мере на двух системах: одна из них обладает перроновской устойчивостью, а другая – перроновской полной неустойчивостью.

Множество всевозможных наборов различных мер устойчивости и неустойчивости одномерных систем конечно, как показывают

Теорема 9. При $n = 1$ меры устойчивости и неустойчивости любой системы (1) удовлетворяют соотношениям

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) \leq \mu_\pi(f), \quad \nu_\pi(f) \leq \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f), \quad (4)$$

$$\mu_\pi(f), \nu_\pi(f) \in \{0, 1/2, 1\}, \quad \mu_\pi(f) + \nu_\pi(f) = 1, \quad \pi = \lambda, \sigma. \quad (5)$$

Теорема 10. При $n = 1$ оба неравенства в цепочках (4) для некоторой ограниченной линейной системы (1) являются строгими, а случаи всех равенств в этих цепочках для каждой пары мер устойчивости и неустойчивости, задаваемой условиями (5), реализуются на некоторых автономных системах (1).

В теореме 6 попутно подтверждена реализуемость как нулевых, так и единичных значений сразу всеми мерами устойчивости или неустойчивости для двумерных автономных систем. Более того, для таких систем множество реализуемых наборов всех мер оказывается уже довольно богатым, о чём и говорят

Теорема 11. При $n = 2$ для каждого отдельного нестрогого неравенства в цепочках (4) существуют две автономные системы вида (1): для одной из них оно обращается в равенство, а для другой – в строгое неравенство.

Теорема 12. При $n = 2$ для любого $r > 0$ существует автономная система (1), у которой меры устойчивости всех трёх типов принимают одно и то же положительное значение, равно как и все меры неустойчивости, причём отношение этих двух значений равно r , а правое неравенство в цепочке (4) обращается в равенство.

Литература

1. Сергеев И. Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.
2. Сергеев И. Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.
3. Сергеев И. Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.
4. Сергеев И. Н. Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 6. С. 895–904.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

П.А. Худякова

А. М. Ляпунов назвал [1, с. 43] линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$