Теорема 8. *При любом $n \in \mathbb{N}$ каждая из перечисленных в теореме 7 ситуаций реализуется на некоторой ограниченной скалярной линейной системе вида (1), причём вторая ситуация реализуется по меньшей мере на двух системах: одна из них обладает перроновской устойчивостью, а другая – перроновской полной неустойчивостью.*

Множество всевозможных наборов различных мер устойчивости и неустойчивости одномерных систем конечно, как показывают

Теорема 9. *При $n = 1$ меры устойчивости и неустойчивости любой системы (1) удовлетворяют соотношениям*

$$\mu_\lambda(f) = \mu_\sigma(f) \leqslant \mu_\pi(f), \quad \nu_\pi(f) \leqslant \nu_\sigma(f) = \nu_\lambda(f), \tag{4}$$

$$\mu_\varkappa(f), \nu_\varkappa(f) \in \{0,\, 1/2,\, 1\}, \quad \mu_\varkappa(f) + \nu_\varkappa(f) = 1, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma. \tag{5}$$

Теорема 10. *При $n = 1$ оба неравенства в цепочках (4) для некоторой ограниченной линейной системы (1) являются строгими, а случаи всех равенств в этих цепочках для каждой пары мер устойчивости и неустойчивости, задаваемой условиями (5), реализуются на некоторых автономных системах (1).*

В теореме 6 попутно подтверждена реализуемость как нулевых, так и единичных значений сразу всеми мерами устойчивости или неустойчивости для двумерных автономных систем. Более того, для таких систем множество реализуемых наборов всех мер оказывается уже довольно богатым, о чём и говорят

Теорема 11. *При $n = 2$ для каждого отдельного нестрогого неравенства в цепочках (4) существуют две автономные системы вида (1): для одной из них оно обращается в равенство, а для другой – в строгое неравенство.*

Теорема 12. *При $n = 2$ для любого $r > 0$ существует автономная система (1), у которой меры устойчивости всех трёх типов принимают одно и то же положительное значение, равно как и все меры неустойчивости, причём отношение этих двух значений равно r, а правое неравенство в цепочке (4) обращается в равенство.*

Литература

1. Сергеев И. Н. *Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.

2. Сергеев И. Н. *Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону* // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

3. Сергеев И. Н. *Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем* // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.

4. Сергеев И. Н. *Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы* // Мат. заметки. 2023. Т. 113. № 6. С. 895–904.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

П.А. Худякова

А. М. Ляпунов назвал [1, с. 43] линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с непрерывной и ограниченной на временно́й полуоси $t \geq 0$ матрицей коэффициентов $A(t)$ *приводимой*, если существует линейное невырожденное при всех $t \geq 0$ преобразование $x = L(t)y$, $t \geq 0$, с непрерывно дифференцируемой $n \times n$-матрицей $L(t)$, удовлетворяющей условию $\sup\limits_{t \geq 0} \Big(\|\dot{L}(t)\| + \|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| \Big) < +\infty$ (такое линейное преобразование называется *преобразованием Ляпунова* [2, с. 74]), которое переводит систему (1) в линейную дифференциальную систему с постоянной матрицей коэффициентов. Приводимые системы образуют класс систем, по своим свойствам наиболее близкий к системам с постоянными коэффициентами. Значительные результаты по теории приводимых систем получены Н. П. Еругиным [3]. В частности, в [3, с. 9] установлен следующий критерий приводимости: система (1) приводима тогда и только тогда, когда некоторая её фундаментальная матрица $X(t)$ представима в виде $X(t) = L(t)\exp(Bt)$, $t \geq 0$, где $L(t)$ – матрица преобразования Ляпунова, а B – постоянная матрица.

Во многих задачах теории дифференциальных уравнений возникает вопрос о возможности такой характеризации того или иного свойства дифференциальных систем, которая позволяла бы единообразно на языке функционала, определённого на пространстве систем, отличать системы с данным свойством от систем, этим свойством не обладающих. Прежде чем привести такой критерий для свойства приводимости, дадим нужные определения. Для системы (1) определим вспомогательную функцию

$$\Phi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{C \in SL_n(\mathbb{R}),\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}} \sup_{t \geqslant 0} \max \left\{ \left\| X(t) C e^{-Bt} \right\|, \left\| e^{Bt} C^{-1} X^{-1}(t) \right\| \right\},$$

где $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ – специальная линейная группа порядка n над полем $\mathbb{R}$ (группа по умножению, состоящая из постоянных вещественных $n \times n$-матриц с определителем 1), $\mathbb{R}^{n\times n}$ – векторное пространство $n \times n$-матриц, а $X(t)$ – какая-либо фундаментальная матрица системы (1) (несложно видеть, что функция $\Phi(A)$ от выбора матрицы $X(t)$ не зависит). Функция $\Phi(A)$ принимает значения, не меньшие единицы, и, вообще говоря, может принимать несобственное значение $+\infty$. В отличие от неё функция $\mathcal{P}(A) \stackrel{\text{def}}{=} 1/\Phi(A)$ принимает значения на отрезке $[0, 1]$ (как обычно, считаем $\mathcal{P}(A) = 0$, если $\Phi(A) = +\infty$).

Теорема 1. *Система (1) приводима, если и только если* $\mathcal{P}(A) > 0$, *и не приводима, если и только если* $\mathcal{P}(A) = 0$.

Через $\mathcal{M}_n$ обозначим векторное пространство систем (1) с непрерывными и ограниченными на временно́й полуоси матрицами коэффициентов (далее отождествляем систему и задающую её матрицу коэффициентов). В пространстве $\mathcal{M}_n$ рассмотрим две топологии: компактно-открытую и равномерную (каждая из них метризуема, и последовательность систем (т.е. их матриц коэффициентов в силу указанного отождествления) сходится в первой из этих топологий, если она сходится равномерно на каждом отрезке временно́й полуоси, и во второй из них – если она сходится равномерно на всей временно́й полуоси). Векторное пространство $\mathcal{M}_n$ систем с компактно-открытой топологией обозначим через $\mathcal{M}_n^{\mathrm{c}}$, а с равномерной – через $\mathcal{M}_n^{\mathrm{u}}$. Несложно видеть, что множество систем (1), матрицы коэффициентов которых постоянны, является замкнутым в любом из этих пространств. Вместе с тем из теоремы 1 с помощью рассуждений, аналогичных [4] и [5], следует, что имеет место следующая

Теорема 2. *В каждом из пространств* $\mathcal{M}_n^{\mathrm{u}}$, $n \geqslant 2$, *и* $\mathcal{M}_n^{\mathrm{c}}$, $n \in \mathbb{N}$, *множество приводимых систем является множеством точного класса* F_σ.

Литература

1. Ляпунов А. М. *Собр. соч.* В 6-ти т. Т. 2. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1956.

2. Былов Б. Ф, Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости.* – М.: Наука, 1966.

3. Еругин Н. П. *Приводимые системы* // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 13. Л. – М.: Изд-во АН СССР. 1946. С. 3 – 96.

4. Барабанов Е. А. *Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Труды семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 42 – 63.

5. Худякова П. А. *Полное описание множеств приводимости линейных дифференциальных систем с вещественным параметром-множителем* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 613–626.

УСЛОВИЯ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

К.М. Чудинов

Будем говорить, что непрерывная функция, определенная на полуоси $[0, +\infty)$, осциллирует, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Решения линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента, в отличие от решений уравнений без запаздывания, могут осциллировать начиная с первого порядка: в частности, хорошо известно, что решения автономного уравнения $\dot{x}(t) = -ax(t-r)$, где $a, r \geq 0$, осциллируют, если и только если $ar > 1/e$. Условия осцилляции решений неавтономных уравненений первого порядка с запаздыванием впервые систематически изучал А. Д. Мышкис [1] в середине XX века, однако первые уточнения его результатов появились только в 70-х гг.

Рассмотрим два известных условия осцилляции всех решений линейного неавтономного уравнения
$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \geq 0, \tag{1}$$
где функции a и h непрерывны и $h(t) \leq t$. Будем называть уравнение (1) *уравнением устойчивого типа*, если $a(t) \geq 0$ и $h(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Наиболее сильным по простоте и точности обобщением условий осцилляции, найденных Мышкисом, явилась следующая теорема, полученная Р. Г. Коплатадзе и Т. А. Чантурия.

Теорема 1 [2]. *Если* $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e$, *то все решения уравнения* (1) *устойчивого типа осциллируют.*

В те же годы некоторые исследователи обратили внимание на следующий легко доказываемый факт. Положим $g(t) = \max\{s \leq t \mid h(s)\}$.

Теорема 2. *Если* $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{g(t)}^{t} a(s)\,ds > 1$, *то все решения уравнения* (1) *устойчивого типа осциллируют.*

Отметим, что замена функции h функцией g в теореме 1 не ослабляет результата, поскольку значение нижнего предела не изменяется; напротив, в теореме 2 существенно неубывание функции g, поэтому замена ее произвольной функцией h дает неверное утверждение.

Уточнения и обобщения теорем 1 и 2 составили в последние 30 лет два основных направления исследования условий осцилляции решений дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента. По этим направлениям за это время опубликованы сотни