Теорема. *Уравнение (1) обладает свойством Пенлеве при* $\nu = -8$ *, причем его общее решение выражается через эллиптическую функцию.*

Обозначим $y = \frac{3}{4}w$, тогда (3) примет вид

$$w'' = -\frac{8}{z-K}w' + \frac{6}{z-K}w^2. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет рациональное решение вида $w = \frac{a}{(z-a-K)^2} - \frac{1}{z-a-K}$, где a – произвольная постоянная.

Литература

1. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. *A connection between nonlinear evolution and ordinary differential equations of P-type II* // J. Math. Phys. 1980. Vol. 21. № 5. P. 1006–1015.

2. Андреева Т. К., Мартынов И. П., Пронько В. А. *О применении рядов Лорана для представления решений дифференциальных уравнений* // Научные исследования преподавателей факультета математики и информатики: сб. науч. ст. / ГрГУ им. Я. Купалы; редкол.: И.П. Мартынов (отв. ред.) [и др.]. Гродно: ГрГУ, 2010. С. 37–40.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ СИСТЕМАМИ УРАВНЕНИЙ

А.Б. Антоневич, Е.В. Кузьмина

Рассмотрим задачу об обобщенных решениях для уравнения Риккати вида

$$w'(z) + \gamma w^2(z) = 0, \ \gamma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1}$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) с условием $w(z_0) = C \neq 0$ является функцией

$$w(z) = \frac{1}{\gamma(z-a)}, \quad \text{где} \quad a = z_0 - \frac{1}{\gamma C},$$

однозначно определенной при $z \neq a$. Так как $\gamma \in \mathbb{R}$, то при вещественных $z_0 = x_0$ и C по этой формуле на всей вещественной оси однозначно определено вещественнозначное решение задачи Коши $\frac{1}{\gamma(x-a)}$, имеющее особенность в точке a. Этому решению, которое назовем *формальным*, соответствует однопараметрическое семейство обобщенных функций [1] вида

$$\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{1}{\gamma}M\delta_a, \tag{2}$$

где M – произвольная постоянная. Уравнение на прямой, соответствующее уравнению (1), имеет вид

$$u'(x) + \gamma u^2(x) = 0. \tag{3}$$

Распределения (2) нельзя подставить в уравнение, так как квадрат такого распределения не определен в классической теории. Поэтому требуется выяснить, какие из распределений (2) и в каком смысле можно считать решениями уравнения (3).

В случае дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами обобщенные коэффициенты заменяются на их аппроксимации семействами гладких функций, зависящими от малого параметра ε. Тогда семейство аппроксимирующих уравнений имеет гладкие решения, а обобщенным решением исходного уравнения называется предел решений аппроксимирующих уравнений в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Уравнение (3) не содержит обобщенных коэффициентов и для него нужны другие способы построения аппроксимаций. Например, можно использовать аппроксимацию решениями задачи Коши с комплексными начальными условиями [2].

Определение 1. *Аппроксимацией начального условия* будем называть семейство чисел $C_\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, таких, что $C_\varepsilon \to C$ при $\varepsilon \to 0$. Распределение W будем называть *обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (3) с условием $u(x_0) = C$ при заданном способе аппроксимации начального условия, если решения $w_\varepsilon(x)$ задачи Коши для уравнения (1) с условиями $w_\varepsilon(x_0) = C_\varepsilon$ сходятся при $\varepsilon \to 0$ к W в смысле сходимости в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Таким образом, обобщенные решения могут быть определены как пределы аппроксимирующих семейств в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Но это не единственный способ определения обобщенного решения. Рассмотрим другой подход.

Пусть $w(z)$ – решение уравнения (1) на комплексной плоскости. На вещественной прямой $w(z) = u(x,0) + iv(x,0)$, и эту функцию будем рассматривать как вектор-функцию со значениями в $\mathbb{R}^2$: $(u(x), v(x))$. Из уравнения (1) получаем, что указанная вектор-функция является решением системы

$$\begin{cases} u'_x = \gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v'_x = -2\gamma v(x)u(x). \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *Если $v(x_0) \to 0$ и $u(x_0) \to C$, то функция $u(x)$ почти всюду сходится к формальному решению уравнения (3). Решения системы (4), удовлетворяющие начальным условиям $u(x_0) = \operatorname{Re} C_\varepsilon$, $v(x_0) = \operatorname{Im} C_\varepsilon$, при $\operatorname{Re} C_\varepsilon \to C$, $\operatorname{Im} C_\varepsilon \to 0$ сходятся к вектор-распределению*

$$\left(\frac{1}{\gamma} P\left(\frac{1}{x-a} \right), \pm \frac{\pi}{\gamma} \delta_a \right).$$

Заметим, система (4) связана с уравнением (3) следующим образом:

1) при $v \equiv 0$ система (4) превращается в уравнение (3);

2) при $v(x_0) \neq 0$ система (4) имеет гладкие решения, определенные при всех x;

3) при $v(x_0) \to 0$ решения системы (4) почти всюду сходятся к формальному решению уравнения (3).

Таким образом, систему (4) можно рассматривать как аппроксимацию уравнения (3). Но (4) не единственная система с указанными свойствами. Другие аппроксимирующие системы приводят к другим обобщенным решениям. Например, свойствами 1) – 3) обладает система

$$\begin{cases} u'_x = \frac{1}{\beta^2} \gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v'_x = -2\gamma v(x)u(x), \end{cases} \tag{5}$$

где $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. С помощью этой системы введем понятие обобщенного решения.

Определение 2. Векторное распределение W будем называть *β – обобщенным решением задачи Коши* для уравнения (3) с условием $u(x_0) = C$ при аппроксимации системой (5), если существуют такие $\widetilde{C_1}(\varepsilon) \to C$, $\widetilde{C_2}(\varepsilon) \to 0$, при которых решения $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ аппроксимирующей системы с начальными условиями $u_\varepsilon(x_0) = \widetilde{C_1}(\varepsilon)$, $v_\varepsilon(x_0) = \widetilde{C_2}(\varepsilon)$ являются гладкими на вещественной оси и при $\varepsilon \to 0$ к сходятся к W.

В отличие от случая выше, здесь комплекснозначные функции $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) + iu_\varepsilon(x)$ не являются аналитическими, вместо условий Коши-Римана выполнены равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\beta\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Теорема 2. *При аппроксимации уравнения (3) системой (5) обобщенными решениями задачи Коши являются распределения*

$$W^{\pm}{}_{\beta} = \left(\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right), \pm\frac{1}{\gamma}\beta\pi\delta_a\right)$$

и только они.

Еще один способ аппрокимации задают системы вида

$$\begin{cases} u'_x = \frac{1}{\varepsilon^2}\gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v'_x = -2\gamma v(x)u(x). \end{cases} \tag{6}$$

При фиксированном ε пара функций

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma}\frac{x-a}{(x-a)^2+\varepsilon^2}, \; v_\varepsilon(x) = \pm\frac{\varepsilon}{\gamma}\frac{\varepsilon}{(x-a)^2+\varepsilon^2}$$

есть решение системы (6), причем при $\varepsilon \to 0$ начальные условия стремятся к $(C, 0)$. Это семейство сходится к распределению $\left(\frac{1}{\gamma}P\left(\frac{1}{x-a}\right), 0\right)$. Заметим, что это распределение не может быть обобщенным решением при аппроксимациях вида (5).

Существование качественно различных аппроксимирующих систем, приводящих к разным обобщенным решениям, связано с уточнением математических моделей рассматриваемых процессов и согласуется с прикладной стороной вопроса.

Литература

1. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* М.: Наука, 1979.

2. Кузьмина Е. В. *Обобщенные решения уравнения Риккати* // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58. № 2. С. 144–154.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.И. Громак, А.Л. Кухарев

В теории нелинейных дифференциальных уравнений, как обыкновенных (ОДУ), так и в частных производных (НЧП), мощным инструментом является метод преобразований Беклунда, позволяющий, в частности, по известным решениям строить новые решения. К ОДУ такого типа относятся уравнения Пенлеве, иерархии уравнений Пенлеве [1], а среди уравнений НЧП - солитонные уравнения: Кортевега - де Фриза, sin-Гордона и др. [2].

Рассмотрим иерархию нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d}{dz} + 2w\right)\mathcal{L}_N[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \qquad N = 1, 2, ..., \tag{1}$$