2. Былов Б. Ф, Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. *Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости.* – М.: Наука, 1966.

3. Еругин Н. П. *Приводимые системы* // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 13. Л. – М.: Изд-во АН СССР. 1946. С. 3 – 96.

4. Барабанов Е. А. *Кинематическое подобие линейных дифференциальных систем с параметром-множителем при производной* // Труды семинара им. И. Г. Петровского. Вып. 30. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014. С. 42 – 63.

5. Худякова П. А. *Полное описание множеств приводимости линейных дифференциальных систем с вещественным параметром-множителем* // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 613–626.

УСЛОВИЯ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

К.М. Чудинов

Будем говорить, что непрерывная функция, определенная на полуоси $[0,+\infty)$, осциллирует, если она имеет неограниченную справа последовательность нулей.

Решения линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента, в отличие от решений уравнений без запаздывания, могут осциллировать начиная с первого порядка: в частности, хорошо известно, что решения автономного уравнения $\dot{x}(t) = -ax(t-r)$, где $a, r \geq 0$, осциллируют, если и только если $ar > 1/e$. Условия осцилляции решений неавтономных уравненений первого порядка с запаздыванием впервые систематически изучал А. Д. Мышкис [1] в середине XX века, однако первые уточнения его результатов появились только в 70-х гг.

Рассмотрим два известных условия осцилляции всех решений линейного неавтономного уравнения

$$\dot{x}(t) + a(t)x(h(t)) = 0, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где функции a и h непрерывны и $h(t) \leq t$. Будем называть уравнение (1) *уравнением устойчивого типа*, если $a(t) \geq 0$ и $h(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Наиболее сильным по простоте и точности обобщением условий осцилляции, найденных Мышкисом, явилась следующая теорема, полученная Р. Г. Коплатадзе и Т. А. Чантурия.

Теорема 1 [2]. *Если* $\varliminf\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{h(t)}^{t} a(s)\,ds > 1/e$, *то все решения уравнения* (1) *устойчивого типа осциллируют.*

В те же годы некоторые исследователи обратили внимание на следующий легко доказываемый факт. Положим $g(t) = \max\{s \leq t \mid h(s)\}$.

Теорема 2. *Если* $\varlimsup\limits_{t\to+\infty} \int\limits_{g(t)}^{t} a(s)\,ds > 1$, *то все решения уравнения* (1) *устойчивого типа осциллируют.*

Отметим, что замена функции h функцией g в теореме 1 не ослабляет результата, поскольку значение нижнего предела не изменяется; напротив, в теореме 2 существенно неубывание функции g, поэтому замена ее произвольной функцией h дает неверное утверждение.

Уточнения и обобщения теорем 1 и 2 составили в последние 30 лет два основных направления исследования условий осцилляции решений дифференциальных уравнений с запаздыванием аргумента. По этим направлениям за это время опубликованы сотни работ. Приведем некоторые результаты развития этих направлений, полученные за последние несколько лет.

Рассмотрим уравнение с несколькими запаздываниями.

$$\dot{x}(t)+\sum_{k=1}^{m} a_k(t)x(h_k(t))=0, \quad t\ge 0, \tag{2}$$

где для $k=\overline{1,m}$ функции a_k локально суммируемы, функции h_k измеримы и $h_k(t)\le t$ почти всюду. При заданной измеримой по Борелю начальной функции уравнение (2) однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций. Уравнение (2) назовем уравнением устойчивого типа, если $a_k(t)\ge 0$ и $h_k(t)\to\infty$ при $t\to\infty$.

Нетрудно уточнить теоремы 1 и 2 следующим образом.

Теорема 3. *Положим* $h(t)=\max\limits_k h_k(t)$ *и* $g(t)=\max\limits_k g_k(t)$. *Если выполнено одно из условий*

$$\varliminf_{t\to+\infty}\int\limits_{h(t)}^{t}\sum_{k=1}^{m} a_k(s)\,ds>1/e, \quad \varlimsup_{t\to+\infty}\int\limits_{g(t)}^{t}\sum_{k=1}^{m} a_k(s)\,ds>1,$$

то все решения уравнения (2) *устойчивого типа осциллируют.*

Очевидный недостаток этих результатов иллюстрирует, например, ситуация, когда для некоторых k и t имеем $h_k(t)=t$. Проблема состоит в том, чтобы учесть в равной мере все m запаздываний. Ее решает следующая теорема.

Определим m семейств множеств $E_k(t)=\{s\ge t \mid h_k(s)<t\}$, $k=\overline{1,m}$.

Теорема 4 [3, 4]. *Если выполнено одно из условий*

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{E_k(t)} a_k(s)\,ds>1, \quad \varliminf_{t\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{E_k(t)} a_k(s)\,ds>1/e,$$

то все решения уравнения (2) *устойчивого типа осциллируют.*

Отметим, что теорема 4 даже в случае $m=1$ существенно обобщает теоремы 1 и 2.

Недавно были найдены обобщения теоремы 4 на уравнение

$$\dot{x}(t)+\int\limits_{0}^{t} x(s)\,d_s r(t,s)=0, \quad t\ge 0, \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса, функция $r(t,\cdot)$ имеет ограниченную вариацию для всех t, функция $\rho(t)=\bigvee\limits_{s=0}^{t} r(t,s)$ локально суммируема и функция $r(\cdot,s)$ измерима для всех s. Соответствующее уравнению (3) неоднородное уравнение включает как частные случаи уравнение (2) с сосредоточенными запаздываниями, интегро-дифференциальные уравнения с последействием и уравнения, содержащие последействия разных типов (при этом начальная функция переносится в правую часть). Для обобщения теоремы 4 достаточно исследовать однородное уравнение (3).

Уравнение (3) является уравнением устойчивого типа, если для всех t функция $r(t,\cdot)$ не убывает и для всех $s\ge 0$ существует такое $T(s)>s$, что для всех $\sigma\le s$ и $\tau\ge T(s)$ имеем $r(\tau,\sigma)=0$.

Теорема 5 [5]. *Если выполнено одно из условий*

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\int\limits_t^{+\infty}\int\limits_0^t d_\tau r(s,\tau)\,ds>1,\quad \varliminf_{t\to+\infty}\int\limits_t^{+\infty}\int\limits_0^t d_\tau r(s,\tau)\,ds>1/e,$$

то все решения уравнения (3) *устойчивого типа осциллируют.*

Работа выполнена при финансовой поддержке при поддержке Минобрнауки РФ (госзадание FSNM-2023-0005).

Литература

1. Мышкис А. Д. *О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом* // Матем. сб. 1951. Т. 70. № 3. С. 641–658.

2. Коплатадзе Р. Г., Чантурия Т. А. *О колеблющихся и монотонных решениях дифференциальных уравнений первого порядка с отклоняющимся аргументом* // Дифференц. уравн. 1982. Т. 18. № 8. С. 1463–1465.

3. Chudinov K. *Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations* // *Electron J. Qual. Theory Differ. Eq.* 2016. № 2. 10 с.

4. Чудинов К. М. *Об условиях осцилляции решений дифференциальных уравнений с последействием и обобщении теоремы Коплатадзе — Чантурия* // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61. № 1. С. 224–233.

5. Chudinov K. M. *The Koplatadze–Chanturiya type theorem for linear first-order delay differential equation of general form* // Mem. Differential Equations Math. Phys. 2022. Т. 87. С. 53–62.

ON ASYMPTOTIC EQUIVALENCE OF HIGHER-ORDER QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

I. V. Astashova

We study the problem of asymptotic equivalence of the equations

$$y^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)y^{(j)}(x)+p(x)\,|y(x)|^k\,\operatorname{sgn}y(x)=f(x) \tag{1}$$

and

$$z^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}a_j(x)y^{(j)}(x)+p(x)\,|z(x)|^k\,\operatorname{sgn}z(x)=0 \tag{2}$$

with $n\ge 2$, $k>1$, and continuous functions $p(x)$, $f(x)$ and $a_j(x)$. Equation (2) is a so-called Emden–Fowler type differential equation. It was considered from different points of view (see for example [1, 2] and the bibliography there). In particular, the asymptotic behavior of its solutions vanishing at infinity is described. (See also [3–6].) So, if an asymptotic equivalence of equations (1) and (2) exists, it is possible to describe the asymptotic behavior of vanishing at infinity solutions to equation (1), too. Previous results are formulated in [7–10]. The asymptotic equivalence of ordinary differential equations and their systems can be useful to investigate some problems for partial differential equations (see, for example, [11]). Note that the notion of asymptotic equivalence can be used in different senses (cf.[10, 12–19]).

Hereafter we denote $|y|^k\operatorname{sgn}y$ by $[y]^k_\pm$.