КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОБ ИЗОХРОННЫХ ФОКУСАХ ДВУМЕРНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В.В. Амелькин, В.Ю. Тыщенко

Рассмотрим вещественную дифференциальную систему

$$\dot{x} = -y + P(x,y), \quad \dot{y} = x + Q(x,y), \tag{1}$$

где P и Q – голоморфные в окрестности G начала координат $O(0,0)$ фазовой плоскости xOy функции, не содержащие в своих разложениях в степенные ряды линейных и свободных членов.

Как хорошо известно, начало координат $O(0,0)$, как изолированная особая точка системы (1), является либо центром, либо негрубым фокусом.

В работе [1] центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) назван *изохронным*, если все изображающие точки, начиная двигаться по траекториям центра или фокуса системы (1) с некоторого луча OA в момент времени $t = t_0$, совершают полный оборот вокруг начала за одно и то же время $T = 2\pi$.

Луч OA из приведённого определения изохронности назван в [2] *лучом-изохроной*.

В работе [3] дано определение изохронного сечения, обобщающее понятие луча-изохроны. Приведем это определение, слегка его модифицируя.

Именно, обозначим для каждого $z \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2$ через $\psi(t,z)$ траекторию центра или фокуса $O(0,0)$ системы (1) такую, что $\psi(0,z) = z$ и пусть $\eta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ – аналитическая кривая, трансверсальная векторному полю, определяемому правой частью системы (1), такая, что $\eta(0) = O(0,0), \eta'(0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Кривую η назовем *изохронным сечением* системы (1) в точке $O(0,0)$, если:

i) для любого $z \in \eta$ имеет место включение $\psi(2\pi, z) \in \eta$;

ii) $\psi(t,z) \notin \eta$ для всех $t \in (0, 2\pi)$.

Тогда центр или фокус $O(0,0)$ системы (1) называется *изохронным*, а саму систему (1) называют *изохронной*, если она имеет в точке $O(0,0)$ изохронное сечение.

Основные методы, используемые для изучения изохронных монодромных особых точек голоморфных дифференциальных систем вида (1) могут быть грубо классифицированы на две категории: метод нормальных форм и метод коммутирующих дифференциальных систем.

Одной из нормальных форм является нормальная форма, которая следует из нормальной формы Пуанкаре-Дюлака. Именно, имеет место определение [4, с. 98; 5, с. 242-249]: *дифференциальная система* (1) *называется изохронной, если существует в некоторой окрестности* $G^* \subseteq G$ *точки* $O(0,0)$ *обратимое формальное, вообще говоря, преобразование вида*

$$u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} x^i y^j, \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} B_{ij} x^i y^j, \tag{2}$$

переводящее (1) в систему

$$\dot{u} = -v + u\Phi(u^2+v^2), \quad \dot{v} = u + v\Phi(u^2+v^2) \tag{3}$$

где $\Phi(w) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \delta_j w^j$.

Отметим, что в случае центра $O(0,0)$ голоморфной системы (1) (в нормальной форме (3) $\Phi(w) \equiv 0$) преобразование (2) является сходящимся. В случае фокуса $O(0,0)$ голоморфной системы (1) (в нормальной форме (3) $\Phi(w) \not\equiv 0$), вообще говоря, нельзя гарантировать существование сходящейся замены переменных (2) [5, с. 242-249].

Основополагающим утверждением в методе коммутирующих дифференциальных систем, касающимся изохронного центра системы (1), является теорема 1 работы Н. Н. Ладиса [6]: *для того чтобы голоморфная система дифференциальных уравнений* (1) *имела в начале координат изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы существовала голоморфная в окрестности точки* $O(0,0)$ *система*

$$\dot{x} = x + M(x,y), \quad \dot{y} = y + N(x,y),$$

где M *и* N *не содержат линейных и свободных членов, коммутирующая с* (1).

Отметим, что после опубликования работы [6] были получены некоторые частные результаты об изохронных центрах системы (1). И только спустя 24 года, теорема Н. Н. Ладиса была сформулирована и передоказана в работе [7, теорема 2.3].

Поскольку в нормальной форме (3) в случае фокуса $O(0,0)$ системы (1) ряды (2), вообще говоря, расходятся, то естественно получить необходимые и достаточные условия, при выполнении которых ряды (2) являются сходящимися.

Дальнейшие исследования голоморфной системы (1) основываются на определении изохронного фокуса $O(0,0)$ с точки зрения наличия у особой точки $O(0,0)$ аналитических изохронных сечений и равносильного (как будет показано ниже) этому определению определения с точки зрения приведения системы (1) к специальной нормальной форме.

Определение. Будем говорить, что особая точка $O(0,0)$ системы (1) является *изохронным фокусом*, если существует в некоторой окрестности $G^* \subseteq G$ точки $O(0,0)$ биголоморфизм вида (1), переводящий (1) в голоморфную систему (3), где $\Phi(w) \not\equiv 0$.

Теорема. *Для того чтобы голоморфная система дифференциальных уравнений* (1) *имела в особой точке* $O(0,0)$ *изохронный фокус, необходимо и достаточно, чтобы были эквивалентны следующие утверждения:*

1) существует голоморфная в окрестности $G^* \subseteq G$ *начала координат* $O(0,0)$ *система*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x + X(x,y))\Phi((x+\alpha(x,y))^2 + (y+\beta(x,y))^2), \\ \dot{y} &= (y + Y(x,y))\Phi((x+\alpha(x,y))^2 + (y+\beta(x,y))^2), \end{aligned}$$

коммутирующая с системой (1)*, где* $\Phi(w) \not\equiv 0, \alpha(x,y) \equiv \sum\limits_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij}x^i y^j, \beta(x,y) \equiv$ $\equiv \sum\limits_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij}x^i y^j$;

2) существует в окрестности $G^* \subseteq G$ *точки* $O(0,0)$ *биголоморфизм*

$$u = x + \alpha(x,y), \quad v = y + \beta(x,y),$$

переводящий систему (1) *в систему* (3)*, где* $\Phi(w) \not\equiv 0$;

3) существует бесконечно много изохронных сечений в особой точке $O(0,0)$ системы (1), определяемых, вообще говоря, в неявном виде соотношением

$$y\cos\theta = x\sin\theta + \alpha(x,y)\sin\theta - \beta(x,y)\cos\theta, \quad \text{где } \theta \in [0, 2\pi).$$

Литература

1. Абдуллаев Н. *Об изохронности при нелинейных колебаниях* // Тр. Тадж. учительского ин-та им. С. С. Айни. 1954. Вып. 2. С. 71–78.

2. Амелькин В. В. *Изохронные и сильно изохронные фокусы полиномиальных систем Льенара* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 3–10.

3. Sabatini M. *Non-periodic isochronous oscillations in plane differential systems* // Ann. di Matem. 2003. V. 182. № 4. P. 487–501.

4. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Минск, Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982.

5. Зигель К. Л. *Лекции по небесной механике.* М., ИЛ, 1959.

6. Ладис Н. Н. *Коммутирующие векторные поля и изохронность* // Вестник Бел. гос. ун-та им. В. И. Ленина. 1976. Сер. 1. № 1. С. 21–24.

7. Algaba A., Freire E., Gamero E. *Isochronicity via normal form* // Qual. Theory Dyn. Syst. 2000. V. 1. № 5. P. 133–156.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

М.С. Белокурский

Метод отражающей функции Мироненко является современным инструментом, который успешно применяется для качественного исследования дифференциальных уравнений. Разработаны методы, позволяющие строить отражающую функцию даже для тех уравнений, которые не интегрируются в квадратурах. К таким дифференциальным уравнениям относится и уравнение Риккати, которое, как известно, в общем случае не интегрируется в квадратурах. Интерес к уравнениям Риккати вызван тем, что их решения играют важную роль в различных областях физики, а также для некоторых задач оптимального управления.

Если уравнение Риккати имеет линейную отражающую функцию, то, согласно [1], старший коэффициент уравнения равен $b(t)e^{\beta(t)}$, где $b(t)$, $\beta(t)$ – нечетные непрерывно дифференцируемые функции. При этом мы полагаем, что $b(t)$ может обращаться в нуль только в изолированных точках. Поэтому будем рассматривать уравнение Риккати вида

$$\dot{x} = b(t)e^{\beta(t)}x^2 + B(t)x + C(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $B(t)$, $C(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Наряду с уравнением Риккати рассмотрим линейную по фазовой переменной x функцию

$$F(t,x) = f(t) + g(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $f(t)$, $g(t)$ – дифференцируемые функции. Найдем условия на коэффициенты $B(t)$, $C(t)$, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнения Риккати (1) имело линейную отражающую функцию вида (2).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения (2) непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{R}$. *Для того чтобы уравнение Риккати (2) имело линейную по фазовой переменной*