3) существует бесконечно много изохронных сечений в особой точке $O(0,0)$ *системы* (1)*, определяемых, вообще говоря, в неявном виде соотношением*

$$y\cos\theta = x\sin\theta + \alpha(x,y)\sin\theta - \beta(x,y)\cos\theta, \quad \text{где } \theta\in[0,2\pi).$$

Литература

1. Абдуллаев Н. *Об изохронности при нелинейных колебаниях* // Тр. Тадж. учительского ин-та им. С. С. Айни. 1954. Вып. 2. С. 71–78.

2. Амелькин В. В. *Изохронные и сильно изохронные фокусы полиномиальных систем Льенара* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 3–10.

3. Sabatini M. *Non-periodic isochronous oscillations in plane differential systems* // Ann. di Matem. 2003. V. 182. № 4. P. 487–501.

4. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка.* Минск, Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1982.

5. Зигель К. Л. *Лекции по небесной механике.* М., ИЛ, 1959.

6. Ладис Н. Н. *Коммутирующие векторные поля и изохронность* // Вестник Бел. гос. ун-та им. В. И. Ленина. 1976. Сер. 1. № 1. С. 21–24.

7. Algaba A., Freire E., Gamero E. *Isochronicity via normal form* // Qual. Theory Dyn. Syst. 2000. V. 1. № 5. P. 133–156.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

М.С. Белокурский

Метод отражающей функции Мироненко является современным инструментом, который успешно применяется для качественного исследования дифференциальных уравнений. Разработаны методы, позволяющие строить отражающую функцию даже для тех уравнений, которые не интегрируются в квадратурах. К таким дифференциальным уравнениям относится и уравнение Риккати, которое, как известно, в общем случае не интегрируется в квадратурах. Интерес к уравнениям Риккати вызван тем, что их решения играют важную роль в различных областях физики, а также для некоторых задач оптимального управления.

Если уравнение Риккати имеет линейную отражающую функцию, то, согласно [1], старший коэффициент уравнения равен $b(t)e^{\beta(t)}$, где $b(t)$, $\beta(t)$ – нечетные непрерывно дифференцируемые функции. При этом мы полагаем, что $b(t)$ может обращаться в нуль только в изолированных точках. Поэтому будем рассматривать уравнение Риккати вида

$$\dot{x} = b(t)e^{\beta(t)}x^2 + B(t)x + C(t), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

где $B(t)$, $C(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Наряду с уравнением Риккати рассмотрим линейную по фазовой переменной x функцию

$$F(t,x) = f(t) + g(t)x, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

где $f(t)$, $g(t)$ – дифференцируемые функции. Найдем условия на коэффициенты $B(t)$, $C(t)$, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнения Риккати (1) имело линейную отражающую функцию вида (2).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения (2) непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{R}$*. Для того чтобы уравнение Риккати (2) имело линейную по фазовой переменной* *отражающую функцию, определенную на всей числовой прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1. *функция* $\frac{e^{\beta(t)}}{2b(t)}\Big(2\dot\beta(t)+B(t)+B(-t)\Big)$ *доопределяется до дифференцируемой на* $\mathbb{R}$ *функции* $f(t)$ *, которая обращается в нуль при* $t=0$ *;*
2. *имеют место равенства*

$$\Big(2\dot\beta(t)+B(t)+B(-t)\Big)\left(-\tfrac{2\dot b(t)}{b(t)}+B(-t)-B(t)\right)+2\Big(2\ddot\beta(t)+\dot B(t)-\dot B(-t)\Big)+$$
$$+4b(t)\left(e^{\beta(t)}C(t)+e^{-\beta(t)}C(-t)\right)=0,\quad t\in\mathbb{R},$$

и

$$\dot\beta(0)+B(0)=0.$$

Тогда линейная отражающая функция (2) имеет вид

$$F(t,x)=\frac{e^{\beta(t)}}{2b(t)}\Big(2\dot\beta(t)+B(t)+B(-t)\Big)+e^{2\beta(t)}x.$$

Под периодом определенной на всей числовой оси функции $a(t)$ будем понимать такое действительное число $T>0$, что для всех значений переменной выполняется равенство $a(t+T)=a(t)$.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты* $b(t),\ \beta(t),\ B(t),\ C(t)$ *уравнения Риккати (1) непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{R}$ *и являются* 2ω *-периодическими. Если отражающая функция уравнения (1) линейная, то все его решения будут* 2ω *-периодическими.*

В качестве примера можно рассмотреть уравнение

$$\dot x=x^2\sin t+x\left(e^{\cos t}\sin 2t+\sin t\sin 3t\right)+\frac{\sin 4t}{1+\cos^2 3t}+\frac{1}{2}e^{\cos t}\sin 2t\sin 3t-\frac{3}{2}\cos 3t,$$

коэффициенты которого являются 2π -периодическими, а отражающая функция является линейной и имеет вид $F(t,x)=x+\sin 3t$. Отметим, что основным периодом отражающей функции является число $\frac{2\pi}{3}$, однако число 2π также является ее периодом. Поэтому по теореме 2 все решения этого уравнения будут 2π -периодическими.

Доказательства приведенных выше теорем можно найти в [2].

Литература

1. Белокурский М. С. *Почти периодические решения почти периодического уравнения Абеля с линейной отражающей функцией* // Проблемы физики, математики и техники. 2020. № 4 (45). С. 88 – 90.

2. Белокурский М. С. *Периодические и почти периодические решения уравнений Риккати с линейной отражающей функцией* // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. 2022. Т. 66. № 5. С. 479–488. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-5-479-488