К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА В СЛУЧАЕ СЛАБОГО ВЫРОЖДЕНИЯ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

А.Н. Бондарев

Для матричного дифференциального уравнения Ляпунова типа [1]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + C_1(t)XC_2(t) + B_1(t)XB_2(t) + F(t) \equiv G(t, X) \tag{1}$$

изучается краевая задача с условием

$$\sum_{s=1}^{k} M_s X(t_s) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times m}$, A, B_1, B_2, C_1, C_2, F – непрерывные по $t \in I$ матрицы-функции соответствующих размерностей, M_s – заданные постоянные $(n \times n)$-матрицы, $I = [0, \omega]$.

На основе применения конструктивного метода регуляризации [2] эта задача исследуется в банаховом пространстве $C(I, \mathbb{R}^{n\times m})$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц, например любая из норм, приведённых в [3, с. 21]. Данная работа является развитием [1] и обобщением [4, 5].

Исследуется случай слабого вырождения краевых условий [1]

$$\sum_{s=1}^{i} M_s = 0, \tag{3}$$

где число i фиксировано и может принимать любое значение от 2 до k.

Обозначения:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{i-1} M_j \int\limits_{t_j}^{t_i} A(\tau)d\tau - \sum_{r=i+1}^{k} M_r, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \alpha = \max_{t\in I} \|A(t)\|, \quad h = \max_{t\in I} \|F(t)\|,$$

$$\beta_l = \max_{t\in I} \|B_l(t)\|, \quad \delta_l = \max_{t\in I} \|C_l(t)\| \ (l = 1, 2), \quad m_s = \|M_s\| \ (s = \overline{1, k}),$$

$$\tilde m_1 = \sum_{j=1}^{i-1} m_j, \quad \tilde m_2 = \sum_{r=i+1}^{k} m_r, \quad \varepsilon = \alpha + \delta_1\delta_2 + \beta_1\beta_2,$$

$$q = \gamma \sum_{j=1}^{i-1} m_j \left\{ \frac{1}{2}\alpha\varepsilon[(t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2] + (\varepsilon - \alpha)(t_i - t_j) \right\} + \\ + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon\tilde m_1[(t_i - t_1)^2 + (t_k - t_i)^2] + \gamma\varepsilon\tilde m_2(t_k - t_1),$$

$$N = \gamma h \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2}\alpha m_j[(t_j - t_1)^2 + (t_k - t_j)^2 + (t_i - t_j)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\alpha\tilde m_1[(t_i - t_1)^2 + (t_k - t_i)^2] + \tilde m_2(t_k - t_1) \right\}.$$

Теорема. *Пусть выполнено условие* (3), *а также* $\det\Phi \neq 0$, $q < 1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима, при этом для её решения* $X = X(t)$ *справедлива оценка*

$$\|X\|_C \leqslant \frac{N}{1 - q}. \tag{4}$$

С помощью методики, используемой в [1], сначала получено матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t) = \Phi^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} M_j \left[\int_{t_j}^{t}\left(\int_{t_j}^{\tau} A(\sigma)d\sigma\right) G(\tau, X(\tau))d\tau - \int_{t}^{t_i}\left(\int_{\tau}^{t_i} A(\sigma)d\sigma\right) G(\tau, X(\tau))d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{t_j}^{t_i}(G(\tau, X(\tau)) - A(\tau)X(\tau))d\tau\right] - \sum_{r=i+1}^{k} M_r \int_{t_r}^{t} G(\tau, X(\tau))d\tau\right\}. \qquad (5)$$

Для изучения разрешимости уравнения (5) используется принцип сжимающих отображений (см., например, [6, с. 605]). Согласно этому принципу, на основании условий теоремы, решение уравнения (5) существует и единственно в пространстве $C(I, \mathbb{R}^{n\times m})$. Для получения соотношения (4) выполнены оценки по норме в уравнении (5).

Решение уравнения (5) строится классическим методом последовательных приближений типа [6, с. 605]. Соответствующий алгоритм имеет вид

$$X_p(t) = \Phi^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} M_j \left[\int_{t_j}^{t}\left(\int_{t_j}^{\tau} A(\sigma)d\sigma\right) G(\tau, X_{p-1}(\tau))d\tau - \right.\right.$$

$$- \int_{t}^{t_i}\left(\int_{\tau}^{t_i} A(\sigma)d\sigma\right) G(\tau, X_{p-1}(\tau))d\tau -$$

$$\left.\left. - \int_{t_j}^{t_i}(G(\tau, X_{p-1}(\tau)) - A(\tau)X_{p-1}(\tau))d\tau\right] - \sum_{r=i+1}^{k} M_r \int_{t_r}^{t} G(\tau, X_{p-1}(\tau))d\tau\right\}, \quad p = 1, 2, \ldots, \qquad (6)$$

где X_0 – произвольная функция класса $C(I, \mathbb{R}^{n\times m})$.

Доказано, что последовательность $\{X_r\}_0^{\infty}$, определяемая алгоритмом (6), сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (5), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \leqslant \frac{q^r}{1-q}\|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Оценка области локализации решения $X(t)$, определяемая на основе алгоритма (6), имеет вид

$$\|X\|_C \leqslant \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}. \qquad (7)$$

Из (7) при $X_0 \equiv 0$ получено соотношение, из которого следует оценка (4).

Литература

1. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

3. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

4. Бондарев А. Н. *Анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова* // Актуальные проблемы науки и техники: материалы II Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 70-летию ИМИ – ИжГТУ и 60-летию СПИ (филиал) ФГБОУ ВО "ИжГТУ имени М. Т. Калашникова". 2022. С. 11–16.

5. Бондарев А. Н. *Регуляризация многоточечной краевой задачи для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конф. с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. 2022. С. 46–49.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Е.З. Боревич

Рассматривается следующая краевая задача

$$\begin{cases} E'' + E'E = fH(E, E_0), \quad 0 < x < 1, \\ E(0) = E(1) = E_0, \quad E_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где f – положительная константа, $H(E, E_0) = G(E) - G(E_0)$, а функция $G(E)$ класса C^2 удовлетворяет условиям:

1) функция $G(E)$ при $E > 0$ имеет ровно две точки экстремума: E_1 – локальный максимум, E_2 – локальный минимум, причем $E_1 < E_2$ и $G(0) \leq G(E_2)$;

2) $G'(E) > 0$ при $E \in [0, E_1) \cup (E_2, +\infty)$, $\quad G'(E) < 0$ при $E \in (E_1, E_2)$.

Утверждение 1. 1) если $E_1 < E_0 < E_2$, то уравнение $H(E, E_0) = 0$ имеет ровно три положительных решения $0 < E_1(E_0) < E_0 < E_2(E_0)$, причем $H'_E(E_i(E_0), E_0) > 0, \quad i = 1, 2$;

2) существует единственное E_0^* такое, что

$$\int\limits_{E_1(E_0^*)}^{E} H(s, E_0^*) ds \quad \begin{cases} >0 \quad if \quad E \in (E_1(E_0^*), E_2(E_0^*)), \\ =0 \quad if \quad E = E_2(E_0^*). \end{cases}$$

Утверждение 2. Если $0 < E_0 \leq E_1$ или $E_0 \geq E_2$, то задача (1) имеет только тривиальное решение $E(x) = E_0$. Если $E_0 \in (E_1, E_2)$, то задача (1) имеет бифуркационные решения при любом $f > f_k$, где $f_k = -H'(E_0)^{-1}(E_0^2/4 + \pi^2 k^2)$, $k = 1, 2, ...$ [1].

Представляет интерес асимптотическое поведение бифуркационных решений при больших значениях параметра f. Запишем задачу (1) в виде

$$\begin{cases} \varepsilon E'' + \varepsilon E'E = H(E, E_0), \\ E(0) = E(1) = E_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon = f^{-1}$.

Решения $E_k^\nu(x, \varepsilon)$, $\nu = +, -$ задачи (2), определенные при $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k = f_k^{-1}$ будем называть собственными функциями задачи (2).

Теорема 1. 1) Пусть $E_0 \in (E_1, E_0^*)$. Тогда краевая задача (2) имеет семейство решений $E_1^-, \quad E_k^\pm, \quad k = 2, 3, ...$, определенных для достаточно малых ε и таких, что

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_1^- = E_1(E_0)$ равномерно на каждом компакте из $(0, 1)$,

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_k^\pm = E_1(E_0)$ почти всюду на интервале $(0, 1)$;