4. Бондарев А. Н. *Анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова* // Актуальные проблемы науки и техники: материалы II Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 70-летию ИМИ – ИжГТУ и 60-летию СПИ (филиал) ФГБОУ ВО "ИжГТУ имени М. Т. Калашникова". 2022. С. 11–16.

5. Бондарев А. Н. *Регуляризация многоточечной краевой задачи для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конф. с междунар. участием, посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова. 2022. С. 46–49.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Е.З. Боревич

Рассматривается следующая краевая задача

$$\begin{cases} E'' + E'E = fH(E, E_0), \quad 0 < x < 1, \\ E(0) = E(1) = E_0, \quad E_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где f – положительная константа, $H(E, E_0) = G(E) - G(E_0)$, а функция $G(E)$ класса C^2 удовлетворяет условиям:

1) функция $G(E)$ при $E > 0$ имеет ровно две точки экстремума: E_1 – локальный максимум, E_2 – локальный минимум, причем $E_1 < E_2$ и $G(0) \le G(E_2)$;

2) $G'(E) > 0$ при $E \in [0, E_1) \cup (E_2, +\infty)$, $\quad G'(E) < 0$ при $E \in (E_1, E_2)$.

Утверждение 1. 1) если $E_1 < E_0 < E_2$, то уравнение $H(E, E_0) = 0$ имеет ровно три положительных решения $0 < E_1(E_0) < E_0 < E_2(E_0)$, причем $H'_E(E_i(E_0), E_0) > 0, \quad i = 1, 2$;

2) существует единственное E_0^* такое, что

$$\int\limits_{E_1(E_0^*)}^{E} H(s, E_0^*)ds \quad \begin{cases} >0 \quad if \quad E \in (E_1(E_0^*), E_2(E_0^*)), \\ = 0 \quad if \quad E = E_2(E_0^*). \end{cases}$$

Утверждение 2. Если $0 < E_0 \le E_1$ или $E_0 \ge E_2$, то задача (1) имеет только тривиальное решение $E(x) = E_0$. Если $E_0 \in (E_1, E_2)$, то задача (1) имеет бифуркационные решения при любом $f > f_k$, где $f_k = -H'(E_0)^{-1}(E_0^2/4 + \pi^2 k^2)$, $k = 1, 2, \ldots$ [1].

Представляет интерес асимптотическое поведение бифуркационных решений при больших значениях параметра f. Запишем задачу (1) в виде

$$\begin{cases} \varepsilon E'' + \varepsilon E'E = H(E, E_0), \\ E(0) = E(1) = E_0, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon = f^{-1}$.

Решения $E_k^\nu(x, \varepsilon)$, $\nu = +, -$ задачи (2), определенные при $0 < \varepsilon < \varepsilon_k$, где $\varepsilon_k = f_k^{-1}$ будем называть собственными функциями задачи (2).

Теорема 1. 1) Пусть $E_0 \in (E_1, E_0^*)$. Тогда краевая задача (2) имеет семейство решений $E_1^-, \quad E_k^\pm, \quad k = 2, 3, \ldots$, определенных для достаточно малых ε и таких, что

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_1^- = E_1(E_0)$ равномерно на каждом компакте из $(0, 1)$,

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_k^\pm = E_1(E_0)$ почти всюду на интервале $(0, 1)$;

2) Пусть $E_0 \in (E_0^*, E_2)$. Тогда краевая задача (2) имеет семейство решений E_1^+ , $E_k^\pm$, $k = 2, 3, \dots$, определенных для достаточно малых ε и таких, что

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_1^+ = E_2(E_0)$ равномерно на каждом компакте $(0, 1)$,

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_k^\pm = E_2(E_0)$ почти всюду на интервале $(0, 1)$.

Асимптотика собственных функций задачи (2) резко меняется, если $E_0 = E_0^*$. В этом случае семейства решений обладают переходными точками [2].

Теорема 2. Пусть $E_0 = E_0^*$. Тогда краевая задача (2) имеет семейство решений $E_k^\pm$, $k = 1, 2, \dots$, определенных для достаточно малых ε и таких, что каждое семейство $E_k^\pm$ имеет на интервале $(0, 1)$ ровно k переходных точек.

Литература

1. Grandall M.G., Rabinowitz P.H. *Bifurcation from simple eigenvalues* // J. Funct. Anal. 1971. Vol.8. P. 321–340.

2. Fife P.C. *Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second-order differential equations* // J. Math. Anal. Appl. 1976. Vol. 54. P. 497–521.

ОПИСАНИЕ ПОЛУАЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА ЦЕНТРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

В.Т. Борухов, О.М. Кветко

Рассмотрим полиномиальную систему Льенара

$$\dot{x}(t) = y - F(x),\, \dot{y}(t) = -\tilde{g}(x),\, t \in \mathbb{R},\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $F(x)$, $\tilde{g}(x)$ – вещественные полиномы,

$$F(x) = f_n x^n + \dots + f_{n'} x^{n'}\, (n' \le n,\, n' \geqslant 1),$$

$$G(x) = \int\limits_0^x \tilde{g}(\tau) d\tau = g_m x^m + \dots g_{m'} x^{m'}\, (m' \le m,\, m' \geqslant 2).$$

Здесь $n = \overline{deg} F$ и $m = \overline{deg} G$ — верхние степени полиномов F и G соответственно, $n' = \underline{deg} F$ и $m' = \underline{deg} G$ — их нижние степени. Из определения степеней следуют неравенства $f_n \ne 0$, $f_{n'} \ne 0$, $g_n \ne 0$, $g_{n'} \ne 0$, $n \ge n' \ge 1$, $m \ge m' \ge 2$. Предполагается также, что особая точка (0,0) системы (1) удовлетворяет условиям монодромности

$$m' \in 2\mathbb{Z}^+ = (2, 4, \dots),\, n' \ge \frac{m'}{2},\, 8 g_{m'} > f^2_{\frac{m'}{2}}.$$

Согласно [1,2] существование композиции вида

$$F = B(A),\, G = C(A),\, \underline{deg} A \in 2\mathbb{Z}^+, \tag{2}$$

где A , B , C — вещественные полиномы, является необходимым и достаточным условием центра для системы (1) в особой точке (0,0).