2) Пусть $E_0 \in (E_0^*, E_2)$. Тогда краевая задача (2) имеет семейство решений E_1^+ , $E_k^\pm$, $k = 2, 3, \ldots$, определенных для достаточно малых ε и таких, что

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_1^+ = E_2(E_0)$ равномерно на каждом компакте $(0, 1)$,

$\lim_{\varepsilon \to 0+0} E_k^\pm = E_2(E_0)$ почти всюду на интервале $(0, 1)$.

Асимптотика собственных функций задачи (2) резко меняется, если $E_0 = E_0^*$. В этом случае семейства решений обладают переходными точками [2].

Теорема 2. Пусть $E_0 = E_0^*$. Тогда краевая задача (2) имеет семейство решений $E_k^\pm$, $k = 1, 2, \ldots$, определенных для достаточно малых ε и таких, что каждое семейство $E_k^\pm$ имеет на интервале $(0, 1)$ ровно k переходных точек.

Литература

1. Grandall M.G., Rabinowitz P.H. *Bifurcation from simple eigenvalues* // J. Funct. Anal. 1971. Vol.8. P. 321–340.

2. Fife P.C. *Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second-order differential equations* // J. Math. Anal. Appl. 1976. Vol. 54. P. 497–521.

ОПИСАНИЕ ПОЛУАЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА ЦЕНТРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

В.Т. Борухов, О.М. Кветко

Рассмотрим полиномиальную систему Льенара

$$\dot{x}(t) = y - F(x),\, \dot{y}(t) = -\tilde{g}(x),\, t \in \mathbb{R},\, x, y \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $F(x)$, $\tilde{g}(x)$ – вещественные полиномы,

$$F(x) = f_n x^n + \ldots + f_{n'} x^{n'}\; (n' \le n,\, n' \geqslant 1),$$

$$G(x) = \int\limits_0^x \tilde{g}(\tau) d\tau = g_m x^m + \ldots g_{m'} x^{m'}\; (m' \le m,\, m' \geqslant 2).$$

Здесь $n = \overline{deg} F$ и $m = \overline{deg} G$ — верхние степени полиномов F и G соответственно, $n' = \underline{deg} F$ и $m' = \underline{deg} G$ — их нижние степени. Из определения степеней следуют неравенства $f_n \ne 0$, $f_{n'} \ne 0$, $g_n \ne 0$, $g_{n'} \ne 0$, $n \ge n' \ge 1$, $m \ge m' \ge 2$. Предполагается также, что особая точка (0,0) системы (1) удовлетворяет условиям монодромности

$$m' \in 2\mathbb{Z}^+ = (2, 4, \ldots),\, n' \ge \frac{m'}{2},\, 8 g_{m'} > f^2_{\frac{m'}{2}}.$$

Согласно [1,2] существование композиции вида

$$F = B(A),\, G = C(A),\, \underline{deg} A \in 2\mathbb{Z}^+, \tag{2}$$

где A , B , C — вещественные полиномы, является необходимым и достаточным условием центра для системы (1) в особой точке (0,0).

Соотношения (2) можно интерпретировать как параметрическое представление центров в пространстве пар полиномов (F, G). С целью описания прямых непараметрических условий центра в работе [3] рассматривалась задача исключения полиномов

$$A(x) = a_k x^k + ... + a_{k'} x^{k'},\ B(x) = b_l x^l + ... + b_{l'} x^{l'},\ C(x) = c_s x^s + ... + c_{s'} x^{s'}$$

из условий (2).

Несколько модифицируя подход из [3], перейдём к проективным координатам

$$\hat{f} = (\hat{f}_n, \hat{f}_{n-1}, ..., \hat{f}_{n'}),\ \hat{g} = (\hat{g}_m, \hat{g}_{m-1}, ..., \hat{g}_{m'})$$

для полиномов F, G. Здесь $\hat{f}_n = 1$, $\hat{f}_i = \dfrac{f_i}{f_n}$, $i \in \{n-1, ..., n'\}$, $\hat{g}_m = 1$, $\hat{g}_i = \dfrac{g_m}{g_i}$, $i \in \{m-1, ..., m'\}$.

Следуя [3], определим множество $P(n, n', m, m') = \{(k, k') : k' \in 2\mathbb{Z}^+, k \geq k', k|(n, m), k'|(n', m'), \dfrac{n}{k} \geq \dfrac{n'}{k'}, \dfrac{m}{k} \geq \dfrac{m'}{k'}\}$, где условие $k|(n, m)$ означает, что $k > 1$ и k делит n и m. Отметим, что, если $P(n, n', m, m')$ — пустое множество, то монодромная особая точка (0,0) системы (1) является фокусом.

Пусть $a_k = 1$, тогда в [3] доказывается, что коэффициенты полиномов $B(A) = \varphi^B_{kl}(a, b)x^{kl} + ... + \varphi^B_{k'l'}(a, b)x^{k'l'}$, $C(A) = \varphi^C_{ks}(a, c)x^{ks} + ... + \varphi^C_{k's'}(a, c)x^{k's'}$ имеют вид $\varphi^B_{kl}(a, b) = b_l$,

$\varphi^B_{kl-1}(a, b) = lb_l a_{k-1},\ \varphi^B_{kl-i}(a, b) = lb_l a_{k-i} + \tilde{\varphi}^B_{kl-i}(b_l, a_{k-1}, ..., a_{k-i+1})\,\forall i \in \{2, ..., k-k'\}$,

$\varphi^B_{k(l-j)}(a, b) = b_{l-j} + \tilde{\varphi}^B_{k(l-j)}(b_l, ..., b_{l-j+1}, a)\,\forall j \in \{1, ..., l-l'\}$,

$\varphi^C_{ks}(a, c) = c_s,\ \varphi^C_{ks-1}(a, c) = sc_s a_{k-1},\ \varphi^C_{ks-i}(a, c) = sc_s a_{k-i} + \tilde{\varphi}^C_{ks-i}(c_s, a_{k-1}, ..., a_{k-i+1})$
$\forall i \in \{2, ..., k-k'\}$,

$\varphi^C_{k(s-j)}(a, c) = c_{s-j} + \tilde{\varphi}^C_{k(s-j)}(c_s, ..., c_{s-j+1}, a)\,\forall j \in \{1, ..., s-s'\}$.

Теорема. *Для наличия центра в монодромной особой точке (0,0) системы Льенара (1) необходимо и достаточно существования пары* $(k, k') \in P(n, n', m, m')$*, для которой выполняются условия*

$$\varphi^B_{kl-i}(\alpha_F(\hat{f}),\ \beta_F(\hat{f})) = \hat{f}_{n-i},\ \forall i \in \{k-k'+1, ..., n-n'\} \backslash \{k, 2k, ..., kl'\}, \tag{3}$$

$$\varphi^C_{ks-i}(\alpha_G(\hat{g}),\ \beta_G(\hat{g})) = \hat{g}_{m-i}\,\forall i \in \{k-k'+1, ..., m-m'\} \backslash \{k, 2k, ..., ks'\}, \tag{4}$$

$$\alpha_F(\hat{f}) = \alpha_G(\hat{g}), \tag{5}$$

где компоненты вектора $a = \alpha_F(\hat{f})$ *определяются рекурсией*

$$a_k = 1,\ a_{k-i} = \frac{k_{n-i}}{n}\hat{f} - \tilde{\varphi}^B_{kl-i}(\hat{f}_n, a_k, a_{k-1}, ..., a_{k-i+1})\,\forall i \in \{1, ..., k-k'\},$$

компоненты вектора $a = \alpha_G(\hat{g})$ *определяются рекурсией*

$$a_k = 1,\ a_{k-i} = \frac{k}{m}\hat{g}_{m-i} - \tilde{\varphi}^C_{ks-i}(\hat{g}_m, a_k, a_{k-1}, ..., a_{k-i+1})\,\forall i \in \{1, ..., k-k'\},$$

компоненты вектора $b = \beta_F(\hat{f})$ *определяются рекурсией*

$$b_l = \hat{f}_n = 1,\ b_{l-j} = \hat{f}_{n-kj} - \tilde{\varphi}^B_{k(l-j)}(b_l, ..., b_{l-j+1}, a)\,\forall j \in \{1, ..., l-l'\},$$

компоненты вектора $c = \beta_G(\hat{g})$ *определяются рекурсией*

$$c_s = \hat{g}_m = 1,\, c_{s-j} = \hat{g}_{m-kj} - \tilde{\varphi}^C_{k(s-j)}(c_s, ..., c_{s-j+1}, a)\, \forall j \in \{1, ..., s-s'\}.$$

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^N = \{(\hat{f}, \hat{g})\}\, (N = n - n' + m - m')$ коэффициентов полиномов $\hat{F}$, $\hat{G}$. Обозначим через $Q_{(k,k')}$ множество векторов $\{(\hat{f}, \hat{g})\}$, удовлетворяющих условиям (3), (4), (5).

Следствие. Полуалгебраическое множество $Q(n, n', m, m') \subset \mathbb{R}^N$ коэффициентов полиномов $\hat{F}$, $\hat{G}$, для которых системы Льенара (1) имеют центр в монодромной особой точке (0,0), задаётся формулой

$$Q(n, n', m, m') = \bigcup_{(k,k') \in P(n,n',m,m')} Q_{(k,k')}.$$

Литература

1. Черкас Л.А. *Степень негрубости фокуса в уравнении Льенара.* // Доклады Академии наук БССР. 1979. Т.23. №8. С. 681 - 683.

2. Chritopher C. *An algebraic approach to the classification of centers in polynomial Lienard systems.* // Jornal of Mathematical Analysis and Applicatin. 1999. V.229 P. 319-329.

3. Борухов В. Т. *Алгебраический критерий существования центра в монодромной особой точке полиномиальной системы Льенара.* // Дифференц. уравнения. 2022. Т.58. №8. № 1. С. 1020–1031.

О СОСУЩЕСТВОВАНИИ ТРЕХ СИЛЬНО ИЗОХРОННЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ЦЕНТРОВ

М.Н. Василевич

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = x + Q(x, y), \tag{1}$$

где P и Q – голоморфные в окрестности $O(0,0)$ функции, начинающиеся со степеней 2 и выше. Предполагаем, что $O(0,0)$ – изохронный центр системы (1). Он называется сильно изохронным относительно оси Ox, если любая траектория системы (1), пересекающая ось Ox при значении $t = t_0$ вновь пересекает ее при значении $t = t_0 + \pi$.

Теорема 1 [1]. *Для того чтобы система (1) была сильно изохронной относительно оси Ox, необходимо и достаточно, чтобы существовала замена*

$$u = x + U(x, y), \qquad v = y,$$

где U – голоморфная в окрестности $O(0,0)$ функция, начинающаяся со степеней 2 и выше, переводящая систему (1) в систему вида

$$\frac{du}{dt} = -v + uF(u, v), \qquad \frac{dv}{dt} = u + vF(u, v).$$

Будем говорить, что сильно изохронный относительно Ox центр имеет изохронность четвертого порядка, если он также сильно изохронный относительно оси Oy. Если