компоненты вектора $c = \beta_G(\hat{g})$ *определяются рекурсией*

$$c_s = \hat{g}_m = 1,\, c_{s-j} = \hat{g}_{m-kj} - \tilde{\varphi}^C_{k(s-j)}(c_s, ..., c_{s-j+1}, a)\, \forall j \in \{1, ..., s-s'\}.$$

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^N = \{(\hat{f}, \hat{g})\}\,(N = n - n' + m - m')$ коэффициентов полиномов $\hat{F}$, $\hat{G}$. Обозначим через $Q_{(k,k')}$ множество векторов $\{(\hat{f}, \hat{g})\}$, удовлетворяющих условиям (3), (4), (5).

Следствие. Полуалгебраическое множество $Q(n, n', m, m') \subset \mathbb{R}^N$ коэффициентов полиномов $\hat{F}$, $\hat{G}$, для которых системы Льенара (1) имеют центр в монодромной особой точке (0,0), задаётся формулой

$$Q(n, n', m, m') = \bigcup_{(k,k') \in P(n,n',m,m')} Q_{(k,k')}.$$

Литература

1. Черкас Л.А. *Степень негрубости фокуса в уравнении Льенара.* // Доклады Академии наук БССР. 1979. Т.23. №8. С. 681 - 683.

2. Chritopher C. *An algebraic approach to the classification of centers in polynomial Lienard systems.* // Jornal of Mathematical Analysis and Applicatin. 1999. V.229 P. 319-329.

3. Борухов В. Т. *Алгебраический критерий существования центра в монодромной особой точке полиномиальной системы Льенара.* // Дифференц. уравнения. 2022. Т.58. №8. № 1. С. 1020–1031.

О СОСУЩЕСТВОВАНИИ ТРЕХ СИЛЬНО ИЗОХРОННЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ЦЕНТРОВ

М.Н. Василевич

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = x + Q(x, y), \tag{1}$$

где P и Q – голоморфные в окрестности $O(0,0)$ функции, начинающиеся со степеней 2 и выше. Предполагаем, что $O(0,0)$ – изохронный центр системы (1). Он называется сильно изохронным относительно оси Ox, если любая траектория системы (1), пересекающая ось Ox при значении $t = t_0$ вновь пересекает ее при значении $t = t_0 + \pi$.

Теорема 1 [1]. *Для того чтобы система (1) была сильно изохронной относительно оси Ox, необходимо и достаточно, чтобы существовала замена*

$$u = x + U(x, y), \qquad v = y,$$

где U – голоморфная в окрестности $O(0,0)$ функция, начинающаяся со степеней 2 и выше, переводящая систему (1) в систему вида

$$\frac{du}{dt} = -v + uF(u, v), \qquad \frac{dv}{dt} = u + vF(u, v).$$

Будем говорить, что сильно изохронный относительно Ox центр имеет изохронность четвертого порядка, если он также сильно изохронный относительно оси Oy. Если

$O_1(x_1, y_1)$ – другая особая точка системы (1), причем центр, то будем называть его сильно изохронным четвёртого порядка, если он сильно изохронный относительно прямых $x = x_1$ и $y = y_1$.

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + ax^2 + bxy + Ay^2, \quad \frac{dy}{dt} = x + Ax^2 + Bxy + Cy^2. \tag{2}$$

Поставим задачу: построить систему вида (2), имеющую три центра, причем сильно изохронных четвертого порядка.

Теорема 2. *Система*

$$\frac{dx}{dt} = -y + \frac{1}{3}(-5+3a)\,xy - \frac{2\,(-3+a)\,(-13+3a)\,x^2y}{9\,(-4+a)},$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \frac{2\,(-13+3a)\,x\,(2x^2+27y^2-9ay^2)}{27\,(-4+a)} + \frac{1}{3}\left(-4x^2+3y^2+3ay^2\right) \tag{3}$$

имеет три центра сильно изохронных четвертого порядка. Координаты этих центров:

$$O(0,0), \quad A\left(\frac{9\sqrt{-4+a}}{2\left(\sqrt{3}+3\sqrt{-4+a}\right)},\ 0\right), \quad B\left(-\frac{9\sqrt{-4+a}}{2\left(\sqrt{3}-3\sqrt{-4+a}\right)},\ 0\right).$$

Ниже на рис. 1 представлены траектории системы (3) при значении $a = 7$. На рис. 2 изображены четверти траектории системы (3) на отрезках времени $t \in (0, \pi/2]$, $t \in (\pi/2, \pi]$, $t \in (\pi, 3/2\,\pi]$, $t \in (3/2\,\pi, 2\pi]$. Изображающие точки начинают свое движение с оси Ox одновременно. Графики выполнены системой компьютерной алгебры “Mathematica”.

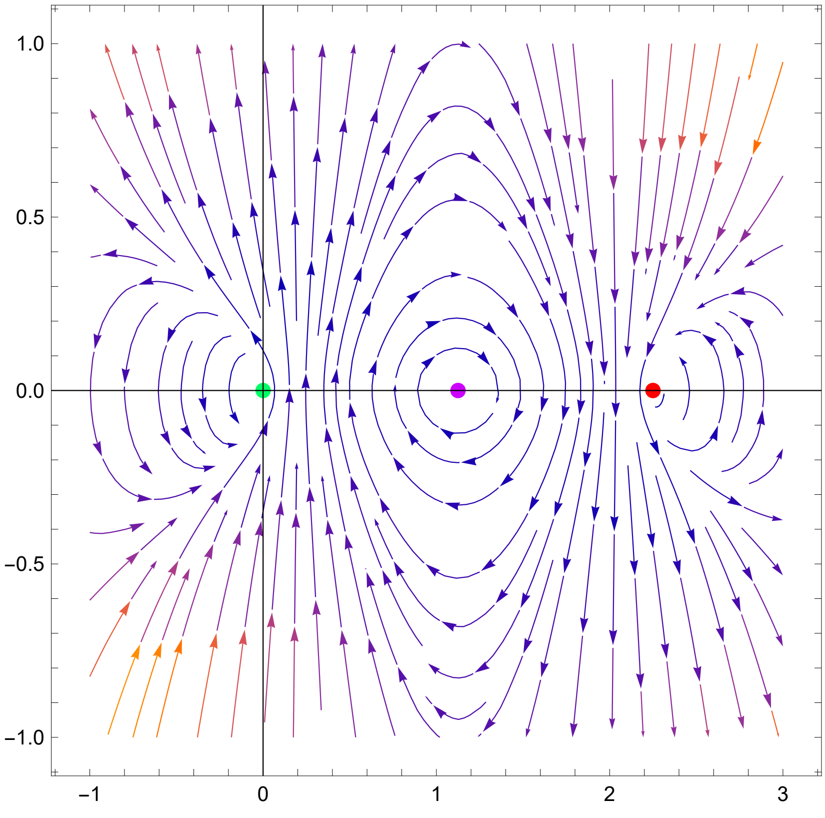

Рис. 1. Траектории системы 2

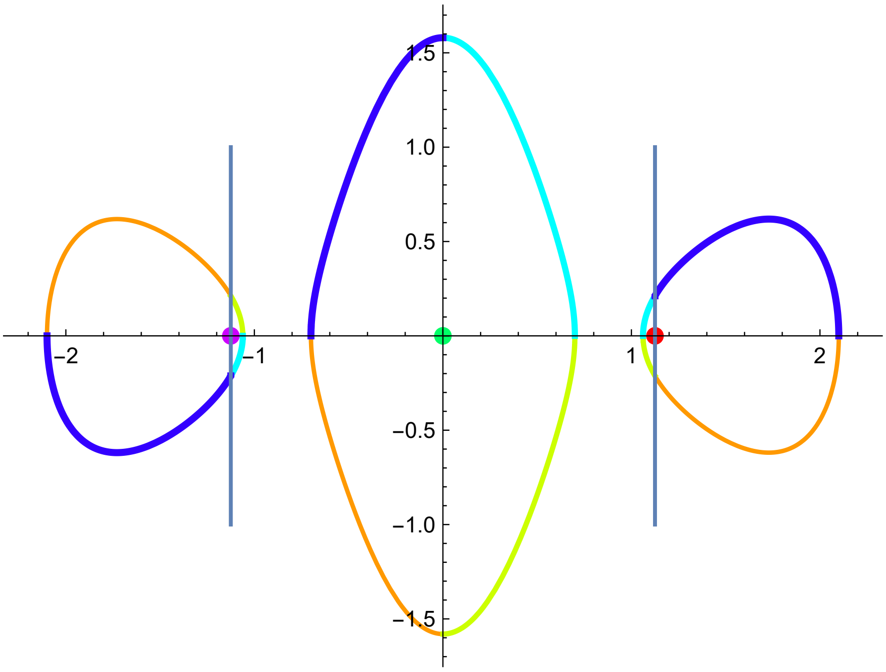

Рис. 2. Траектории системы 2 на временных отрезках длиной $t = \pi/2$

Литература

1. Руденок А. Е. *Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льенара* // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.

О РАСПОЛОЖЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ АНТИСЕДЛАМИ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ И СЕДЛОМ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

А.А. Гринь, А.В. Кузьмич

Рассматривается вещественная автономная квадратичная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy \equiv P(x,y), \ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^i \equiv Q(x,y), \qquad (1)$$

к которой с помощью аффинного преобразования фазовых переменных и растяжения шкалы времени может быть сведена произвольная квадратичная система.

Система (1) на вещественной фазовой плоскости может иметь только предельные циклы, окружающие лишь одну особую точку – фокус, а всего она имеет не более двух фокусов [1]. Отсюда следует, что если система (1) имеет предельные циклы, то возможны их следующие распределения на фазовой плоскости: 1) $n, n > 0$, 2) (n_1, n_2), $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $n_1 + n_2 > 0$.

В работах [2,3] Л.А. Черкасом с помощью комбинированного применения системы прогноза Смейла и признака Дюлака был получен набор квадратичных систем с различными распределениями предельных циклов и конфигурациями особых точек.