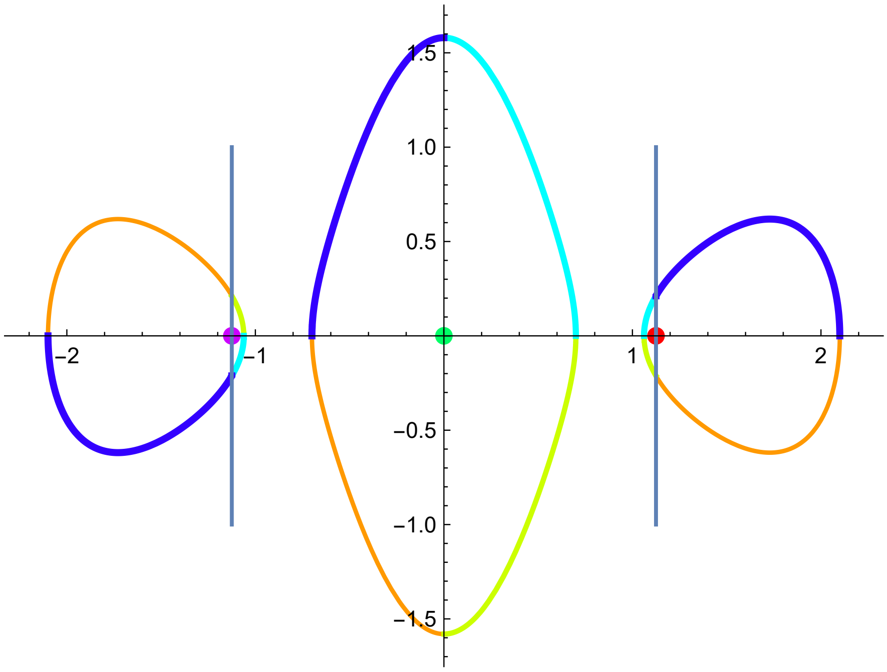

Рис. 2. Траектории системы 2 на временных отрезках длиной $t = \pi/2$

Литература

1. Руденок А. Е. *Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льенара* // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.

О РАСПОЛОЖЕНИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ АНТИСЕДЛАМИ НА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ И СЕДЛОМ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

А.А. Гринь, А.В. Кузьмич

Рассматривается вещественная автономная квадратичная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy \equiv P(x,y), \;\; \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^i y^i \equiv Q(x,y), \tag{1}$$

к которой с помощью аффинного преобразования фазовых переменных и растяжения шкалы времени может быть сведена произвольная квадратичная система.

Система (1) на вещественной фазовой плоскости может иметь только предельные циклы, окружающие лишь одну особую точку – фокус, а всего она имеет не более двух фокусов [1]. Отсюда следует, что если система (1) имеет предельные циклы, то возможны их следующие распределения на фазовой плоскости: 1) $n, n > 0$, 2) (n_1, n_2), $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $n_1 + n_2 > 0$.

В работах [2,3] Л.А. Черкасом с помощью комбинированного применения системы прогноза Смейла и признака Дюлака был получен набор квадратичных систем с различными распределениями предельных циклов и конфигурациями особых точек.

Целью настоящей работы является развитие и дополнение результатов работ [2,3] за счет изучения распределений предельных циклов двухпараметрических семейств квадратичных систем (1) с конфигурациями особых точек вида $F+A+S_\infty$, т.е систем, имеющих две особые точки – фокус в точке $(1,-1)$ и антиседло в точке $(x_0,-1/x_0), x_0<0$ в конечной части плоскости и одно седло в бесконечности.

Для нескольких случаев двухпараметрических семейств вещественных автономных квадратичных систем (1) с указанной конфигурацией особых точек на плоскости рассматриваемых параметров найдены области с одинаковыми распределениями предельных циклов. Идея исследования основана на комбинированном применении системы прогноза Смейла и признака Дюлака– Черкаса [2,3]. Сначала каждая из изучаемых квадратичных систем преобразуется в систему Льенара, для которой в плоскости рассматриваемых параметров определяются области с одинаковыми распределениями решений системы прогноза Смейла, что затем подтверждается при помощи построения функций Дюлака–Черкаса. Построение квазиполиномиальных функций Дюлака–Черкаса сводится к решению сеточной задачи линейного программирования и является очень трудоемким процессом поскольку для каждой из областей с одинаковыми распределениями решений системы прогноза Смейла подбор этих функций подходящей структуры, сеток оптимизации и других элементов задачи линейного программирования проводится индивидуально. Однако такой подход позволяет исключить появление кратных предельных циклов и решить 16-ю проблему Гильберта для рассмотренных двухпараметрических семейств квадратичных систем, что невозможно достичь другими известными методами. В итоге исследования получен следующий основной результат

Теорема. *Система (1) при* $a_{02}=14/13, a_{20}=-40$ *в полосе* $\{(a_{01},a_{11})\in W,\ W:-$ $-37.08\le a_{01}\le 36.001, -6.07\le a_{11}\le 6.07\}$*, плоскости параметров имеет области со следующими распределениями предельных циклов* $(0,0),(0,1),(0,1),(1,1),(2;0),(1,2),$ $(1,3)$ *на фазовой плоскости.*

Опыт применения нашего подхода дает уверенность в его эффективности для решения проблемы предельных циклов и в других случаях параметрических семейств полиномиальных систем.

Подробное изложение полученных результатов для системы (1) с указанной конфигурацией особых точек представлено в статьях [4, 5].

Литература

1. Reyn J. *Phase portraits of planar quadratic systems* // Mathematics and Its Applications. 2007. V. 593.

2. Черкас Л. А. *Квадратичные системы с максимальным числом предельных циклов.* // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 10. С. 1409–1419.

3. Черкас Л. А. *Об оценке числа предельных циклов квадратичной системы* // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 5. С. 628–639.

4. Гринь А. А. *Распределения предельных циклов квадратичных систем с двумя антиседлами на фазовой плоскости и седлом в бесконечности* // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Сер. 2, Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2021. Т. 11. № 2. С. 37–46.

5. Гринь А. А., Кузьмич А. В., Сидоренко И. Н. *Распределения предельных циклов квадратичных систем фокусом и антиседлом на фазовой плоскости и двумя седлами и узлом в бесконечности* // Вестник Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Сер. 2, Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. 2022. Т. 12. № 1. С. 6–15.