

В отличие от случая выше, здесь комплекснозначные функции $w_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) + iu_\varepsilon(x)$ не являются аналитическими, вместо условий Коши-Римана выполнены равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\beta \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Теорема 2. При аппроксимации уравнения (3) системой (5) обобщенными решениями задачи Коши являются распределения

$$W^\pm_\beta = \left(\frac{1}{\gamma} P \left(\frac{1}{x-a} \right), \pm \frac{1}{\gamma} \beta \pi \delta_a \right)$$

и только они.

Еще один способ аппроксимации задают системы вида

$$\begin{cases} u'_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \gamma v^2(x) - \gamma u^2(x); \\ v'_x = -2\gamma v(x)u(x). \end{cases} \quad (6)$$

При фиксированном ε пара функций

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\gamma} \frac{x-a}{(x-a)^2 + \varepsilon^2}, \quad v_\varepsilon(x) = \pm \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{\varepsilon}{(x-a)^2 + \varepsilon^2}$$

есть решение системы (6), причем при $\varepsilon \rightarrow 0$ начальные условия стремятся к $(C, 0)$. Это семейство сходится к распределению $\left(\frac{1}{\gamma} P \left(\frac{1}{x-a} \right), 0 \right)$. Заметим, что это распределение не может быть обобщенным решением при аппроксимациях вида (5).

Существование качественно различных аппроксимирующих систем, приводящих к разным обобщенным решениям, связано с уточнением математических моделей рассматриваемых процессов и согласуется с прикладной стороной вопроса.

Литература

1. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике*. М.: Наука, 1979.
2. Кузьмина Е. В. *Обобщенные решения уравнения Риккати* // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2022. Т. 58. № 2. С. 144–154.

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ БЕКЛУНДА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.И. Громак, А.Л. Кухарев

В теории нелинейных дифференциальных уравнений, как обыкновенных (ОДУ), так и в частных производных (НЧП), мощным инструментом является метод преобразований Беклунда, позволяющий, в частности, по известным решениям строить новые решения. К ОДУ такого типа относятся уравнения Пенлеве, иерархии уравнений Пенлеве [1], а среди уравнений НЧП - солитонные уравнения: Кортевега - де Фриза, sin-Гордона и др. [2].

Рассмотрим иерархию нелинейных дифференциальных уравнений

$$\left(\frac{d}{dz} + 2w \right) \mathcal{L}_N[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где оператор $\mathcal{L}$ определяется рекуррентным соотношением

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}_{N+1}[u] = \left[\left(\frac{d^3}{dz^3} + (4\gamma u + \beta_N)\frac{d}{dz} + 2\gamma u_z\right)\mathcal{L}_N[u], \quad \mathcal{L}_1[u] = u, \quad u = u(z), \quad N = 1, 2, \dots \quad (2)$$

В уравнении (1) $w = w(z, \alpha, \beta, \gamma)$ – искомая функция, α, β, γ – параметры (здесь и далее $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{N-1})$).

Из (1), (2) имеем уравнения четного порядка, из которых первые три имеют вид

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \quad (3)$$

$$w^{(4)} = -(\beta_1 + 6(\gamma - 1)w')w'' + (6\gamma + 4)w^2w'' + w(z + (4 + 6\gamma)(w')^2) + 2\beta_1w^3 - 6\gamma w^5 + \alpha, \quad (4)$$

$$w^{(6)} = \alpha - 6s_1\gamma w^5 + 20\gamma^2w^7 + 2w^3(s_2 - 10\gamma(4 + 3\gamma)(w')^2) - 10\gamma(4 + 3\gamma)w^4w'' - w''(s_2 + 6s_1(\gamma - 1)w' + 10\gamma(3\gamma - 10)(w')^2 + 20(\gamma - 1)w^{(3)}) + w(z + 2s_1(3\gamma + 2)(w')^2 + 40(\gamma^2 - \gamma)(w')^3 + 6(5\gamma + 2)(w'')^2 + 8(5\gamma + 2)w'w^{(3)}) - (s_1 + 10(\gamma - 1)w')w^{(4)} + 2w^2((s_1(3\gamma + 2) + 30(\gamma^2 - \gamma)w')w'' + (5\gamma + 2)w^{(4)}),$$

где $s_1 = \beta_1 + \beta_2, s_2 = \beta_1\beta_2$.

Заметим, что уравнение (1) с рекуррентным соотношением (2) для оператора $\mathcal{L}_N$ с ограничением $\gamma = 1$ определяет стандартную иерархию второго уравнения Пенлеве (3) и в этом смысле можно считать иерархию (1) обобщением стандартной иерархии второго уравнения Пенлеве.

Если ввести функции $q(z) := w' - w^2$, $\Phi(q(z)) := \mathcal{L}_N[q(z)] - z/2$, то уравнение (1) можно записать в виде эквивалентной системы

$$q(z) := w' - w^2, \quad \Phi' + 2w\Phi - \sigma = 0, \quad \sigma = \alpha - 1/2,$$

а для определения функции $q(z)$ имеем уравнение

$$\Phi'' - \frac{(\Phi')^2}{2\Phi} + 2q\Phi + \frac{\sigma^2}{2\Phi} = 0, \quad (5)$$

которое в случае $\gamma = 1$ определяет иерархию уравнения P_{34} , а уравнение $\Phi(q) = 0$ определяет иерархию первого уравнения Пенлеве.

Уравнение (5) инвариантно относительно преобразования

$$S : q(z, \sigma) \rightarrow \hat{q}(z, \hat{\sigma}) = q(z, -\sigma),$$

которое используем для построения преобразования Беклунда уравнения (1).

Теорема 1. Пусть $w = w(z, \alpha, \beta, \gamma)$ – решение уравнения (1) при фиксированных значениях параметров, такое, что $\mathcal{L}_N[w' - w^2] \neq z/2$. Тогда преобразование

$$B_1 : w \rightarrow \tilde{w} = w - \frac{2\alpha - 1}{2\mathcal{L}_N[w' - w^2] - z} \quad (6)$$

определяет решение уравнения (1) при $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = (-\alpha + 1, \beta, \gamma)$.

Известно, что в случае $\gamma = 1$ уравнение (1) имеет дополнительную симметрию

$$S : w(z, \alpha, \beta, 1) \rightarrow \tilde{w}(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, 1) = -w(z, -\alpha, \beta, 1),$$

которая вместе с преобразованием (6) позволяет построить алгебру симметрий Вейля типа $A_1^{(1)}$ для стандартной иерархии второго уравнения Пенлеве. В частности, можно построить рациональные решения для всех $\alpha \in \mathbb{Z}$ и решения Эйри для всех $\alpha = n + 1/2, n \in \mathbb{Z}$. Уравнение (1) в общем случае такой симметрии не имеет. Однако, для некоторых значений параметров уравнение (1) также может иметь дополнительные симметрии. Так, например, для уравнения (4) с ограничением $\beta_1 = 0, \gamma = 1/6$ имеем уравнение

$$w^{(4)} - 5w'w'' - 5w^2w'' - 5w(w')^2 - zw + w^5 - \alpha = 0, \quad (7)$$

которое вместе с симметрией (6) имеет дополнительную симметрию.

Теорема 2. Пусть $w = w(z, \alpha)$ — решение уравнения (7) при фиксированном значении параметра α , такое, что

$$R(z, w) = z - w^4 - 4w^2w' - 3(w')^2 + ww'' + w''' \neq 0.$$

Тогда преобразование

$$B_2 : w \rightarrow \tilde{w} = w + 2(\alpha + 1)/R(z, w)$$

определяет решение уравнения (7) при $\tilde{\alpha} = -\alpha - 2$.

Заметим, что уравнение (7) является уравнением четвертого порядка иерархии (K_2) , для которого, используя композиции преобразований B_1 и B_2 , можно построить все рациональные решения и специальные классы трансцендентных решений [3], а формулы (1), (2) в этом случае определяют альтернативный метод определения уравнения четвертого порядка иерархии (K_2) .

Литература

1. Gromak V.I. *The Backlund transformations of the higher order Painleve equations*. // CRM Proceeding and Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence. 2001. Vol. 29. P. 3-28.
2. Rogers C., Schief W.K. *Backlund and Darboux Transformations. Geometry and modern applications in soliton theory*. Cambridge University Press. Cambridge, 2002.
3. Gromak V.I. *On Fourth-Order Nonlinear Differential Equations with the Painleve Property*. // Differential Equations, 2006. Vol. 42. No. 8. P. 1076–1085.

О ГЛОБАЛЬНОЙ МЕРОМОРФНОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ СО ВТОРЫМ УРАВНЕНИЕМ ПЕНЛЕВЕ И ЕГО ИЕРАРХИЕЙ

Е.В. Громак, В.И. Громак

В работе рассматриваются аналитические свойства решений линейных уравнений второго порядка с коэффициентами, зависящими от решений второго уравнения Пенлеве и решений первых уравнений обобщенной иерархии второго уравнения Пенлеве. Методом Фробениуса установлены достаточные условия мероморфности общего решения и интегрируемость в замкнутой форме в рациональных функциях линейного уравнения второго порядка с потенциалом, связанным с рациональными решениями уравнений обобщенной иерархии, которая имеет вид

$$\tilde{P}_2^{[2N]} : \left(\frac{d}{dz} + 2w \right) \tilde{L}_N[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \quad N = 1, 2, \dots, \quad (1)$$