# СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

**В.А. Денисюк**

Рассматривается задача Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = g(t,z_n) - \frac{n-1}{\tau_1}\frac{z_1}{1+\rho_1(n-1)^{-\gamma_1}} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{z_2}{1+\rho_2(n-1)^{-\gamma_2}}, \qquad t>0, \\ \frac{dz_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{z_{j-1}}{1+\rho_{j-1}(n-1)^{-\gamma_{j-1}}} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{z_j}{1+\rho_j(n-1)^{-\gamma_j}} + \frac{n-1}{\tau_2}\frac{z_{j+1}}{1+\rho_{j+1}(n-1)^{-\gamma_{j+1}}}, \\ \quad j=2,\dots,n-2, \\ \frac{dz_{n-1}}{dt} = \frac{n-1}{\tau_1}\frac{z_{n-2}}{1+\rho_{n-2}(n-1)^{-\gamma_{n-2}}} - \left(\frac{n-1}{\tau_1}+\frac{n-1}{\tau_2}\right)\frac{z_{n-1}}{1+\rho_{n-1}(n-1)^{-\gamma_{n-1}}}, \\ \frac{dz_n}{dt} = -\theta z_n + \frac{n-1}{\tau_1}\frac{z_{n-1}}{1+\rho_{n-1}(n-1)^{-\gamma_{n-1}}}, \\ z|_{t=0} = z_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\theta > 0$, $0 \le \rho_j < \rho$, $\gamma_j > \gamma > 1$, $\tau_2 > \tau_1 > 0$, функция $g(t,z) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+^2)$ является ограниченной и липшицевой по второму аргументу. Системы такого вида возникают при исследовании многостадийного синтеза вещества (см., например, [1]), при этом $z_n(t)$ описывает концентрацию конечного продукта. Поскольку количество стадий $n$ может быть очень большим, то при нахождении $z_n(t)$ возникает проблема “большой размерности”. Эта проблема была решена Г. В. Демиденко в [2] для системы следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = g(t,x_n) - \frac{n-1}{\tau}x_1, \qquad t>0, \\ \frac{dx_j}{dt} = \frac{n-1}{\tau}x_{j-1} - \frac{n-1}{\tau}x_j, \quad j=2,\dots,n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} = -\theta x_n + \frac{n-1}{\tau}x_{n-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что система (1) переходит в систему (2) при $\rho_j = 0$ и $\tau_2 \to \infty$. В [2] было доказано, что при достаточно больших $n$ последняя компонента решения системы (2) приближенно описывается функцией $y(t)$, которая является решением уравнения с запаздыванием

$$\frac{dy}{dt} = -\theta y + g(t-\tau, y(t-\tau)), \tag{3}$$

притом была получена оценка для $||x_t(t) - y(t)||$, при $n >> 1$.

В [3] исследовалась задача Коши вида (1) при нулевых начальных данных. В данной работе мы изучаем задачу Коши (1) при ненулевых данных. Будем неограниченно увеличивать число уравнений $n$ и, решая каждую из задач Коши, составим последовательность из последних компонент решений $\{z_n^n(t)\}$. Доказано, что эта последовательность сходится к функции $y(t)$, которая является решением начальной задачи для уравнения с запаздыванием (3), где $\tau = \frac{\tau_2\tau_1}{\tau_2-\tau_1}$. Структура начальных данных для (3) зависит от структуры начального вектора $z_0$. Доказательство опирается на метод, предложенный Г. В. Демиденко (см., например, [2, 4]) и развитый в [3] для нелинейных систем вида (1).

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

**Литература**

1. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. *Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 12. С. 2276–2295.

2. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. *Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7. № 1. С. 73–94.

3. Матвеева И. И., Мельник И. А. *О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности* // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 2. С. 312–324.

4. Демиденко Г. В. *Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом* // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 6. С. 1274–1282.

# К РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

**А. И. Кашпар**

Исследуется обобщение задачи [1, 2]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{C}_1(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M},\ \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \tag{2}$$

где $(t, \mathbf{X}) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}_i \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $\mathbf{F} \in \mathbb{C}\left(D, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $D = \left\{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in I, \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1, \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\right\}$, $\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/dt$, $I = [0, \omega]$, $0 < \tilde{\rho}_i \le \infty$ $(i = 1, 2)$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы. Предполагается также, что функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ в области $D$ условию Липшица (локально).

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [1–5], с помощью метода [6] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения задачи (1), (2).

Приняты следующие обозначения:

$$\widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(\mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(\mathbf{0}, \mathbf{0}), \gamma = \|\Phi^{-1}\|,\ c_i = \max_t \|\mathbf{C}_i(t)\|, h_1 = \max_t \|\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}(t)\|,$$

$$h_2 = \max_t \|\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}(t)\|, G = \left\{(t,\ \mathbf{X},\ \mathbf{Y}) : t \in I,\ \|\mathbf{X}\| \le \rho_1,\ \|\mathbf{Y}\| \le \rho_2\right\},$$

$$\lambda_U = \max_{0\le s\le\tau\le\omega} \|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|, \lambda_V = \max_{0\le s\le\tau\le\omega} \|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\|,\ p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3 L_1,$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2 L_1, q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(L_2 + c_1 + c_2), q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(L_2 + c_1 + c_2),$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

где $t \in I$, $0 < \rho_i < \tilde{\rho}_i$ $(i = 1, 2)$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений $d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}$ $(\mathbf{U}(0) = \mathbf{E})$, $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)$ $(\mathbf{V}(0) = \mathbf{E})$, $\mathbf{E}$ – единичная матрица;