Литература

1. Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. *Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 12. С. 2276–2295.

2. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. *Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. 7. № 1. С. 73–94.

3. Матвеева И. И., Мельник И. А. *О свойствах решений одного класса нелинейных систем дифференциальных уравнений большой размерности* // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 2. С. 312–324.

4. Демиденко Г. В. *Системы дифференциальных уравнений высокой размерности и уравнения с запаздывающим аргументом* // Сибирский математический журнал. 2012. Т. 53. № 6. С. 1274–1282.

К РАЗРЕШИМОСТИ И ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. И. Кашпар

Исследуется обобщение задачи [1, 2]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}=\mathbf{C}_1(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{C}_2(t)+\mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t)+\mathbf{F}\left(t,\mathbf{X},\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{M},\ \mathbf{X}(\omega)=\mathbf{N}, \tag{2}$$

где $(t,\mathbf{X})\in I\times\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}_i\in\mathbb{C}\left(I,\,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $\mathbf{F}\in\mathbb{C}\left(D,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $D=\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}):t\in I,\|\mathbf{X}\|<\tilde\rho_1,\|\mathbf{Y}\|<\tilde\rho_2\}$, $\mathbf{Y}=d\mathbf{X}/dt$, $I=[0,\omega]$, $0<\tilde\rho_i\le\infty\ (i=1,2)$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы. Предполагается также, что функция $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально).

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [1–5], с помощью метода [6] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения задачи (1), (2).

Приняты следующие обозначения:

$$\widetilde{\mathbf{F}}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})=\mathbf{C}_1(t)\mathbf{Y}+\mathbf{Y}\mathbf{C}_2(t)+\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}),\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}=\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0}),$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}+\mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0}),\gamma=\|\Phi^{-1}\|,\ c_i=\max_t\|\mathbf{C}_i(t)\|,h_1=\max_t\|\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}(t)\|,$$

$$h_2=\max_t\|\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}(t)\|,G=\{(t,\ \mathbf{X},\ \mathbf{Y}):t\in I,\ \|\mathbf{X}\|\le\rho_1,\ \|\mathbf{Y}\|\le\rho_2\},$$

$$\lambda_U=\max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|,\lambda_V=\max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\|,\ p_1=\frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3L_1,$$

$$p_2=\frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2L_1,q_1=\frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(L_2+c_1+c_2),q_2=\frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(L_2+c_1+c_2),$$

$$\mathbf{Z}=\begin{pmatrix}\|\mathbf{X}\|_C\\ \|\mathbf{Y}\|_C\end{pmatrix},\qquad \mathbf{P}=\begin{pmatrix}p_1&q_1\\p_2&q_2\end{pmatrix},\qquad \mathbf{H}=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix},$$

где $t\in I$, $0<\rho_i<\tilde\rho_i\ (i=1,2)$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений $d\mathbf{U}/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{U}\ (\mathbf{U}(0)=\mathbf{E})$, $d\mathbf{V}/dt=\mathbf{V}\mathbf{B}(t)\ (\mathbf{V}(0)=\mathbf{E})$, $\mathbf{E}$ – единичная матрица;

$\mathbf{P_{UV}}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau$, $\mathbf{Q_{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)$; $\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор, $\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau$, $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t)$; $L_i = L_i(\rho_1,\rho_2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ в области G; $\|\mathbf{X}\|_C = \max\limits_t \|\mathbf{X}(t)\|$ – норма непрерывной матрицы-функции в банаховой алгебре, $\|\cdot\|$ – определенная норма матрицы в этой алгебре, например любая из норм, приведенных в [7, с. 21]; $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – интегральные операторы, определяемые на основе интегральной задачи, эквивалентной (1), (2),

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + \mathbf{P_{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{Q_{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{3}$$

Интегральная задача (3) в явном виде дается соотношениями

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M} + \int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\left(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\right)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \tag{4}$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t) +$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^t \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\left(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\right)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \tag{5}$$

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнены неравенства*

$$p_1\rho_1 + q_1\rho_2 + h_1 \le \rho_1,\ p_2\rho_1 + q_2\rho_2 + h_2 \le \rho_2,\ p_1 + q_2 < 1.$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в области G *, при этом справедлива оценка* $\mathbf{Z} \le (\mathbf{E}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}$.

Замечание. Приведенная теорема, как и [1–5], представляет собой обобщение [8, с. 497] на случай области более общей конфигурации.

Для построения решения задачи (4), (5) разработан алгоритм классического типа (см., например [9, с. 605]), который применительно к операторной системе (3) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{M} + \mathbf{P_{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k),\ \mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{Q_{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ ..., \tag{6}$$

где $\mathbf{X}_0(t), \mathbf{Y}_0(t)$ – произвольные матрицы класса $\mathbb{C}\left(I,\ \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащие множеству $\tilde{G} = \left\{(\mathbf{X}(t),\ \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C \le \rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C \le \rho_2\right\}$, при этом все приближения удовлетворяют условию (2).

Алгоритм (6) для интегральной задачи (4), (5) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1}(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P_{UV}}(t) +$$

$$+\int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\left(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\right)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$k = 0,1,2,...,$$

$$\mathbf{Y}_{k+1}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^t \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\left(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\right)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t).$$

Исследована сходимость, скорость сходимости данного алгоритма, а также получены соответствующие оценки типа [1, 2].

Литература

1. Лаптинский В. Н., Кашпар А. И. *Конструктивный анализ краевой задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2016. (Препринт / Ин-т технол. металлов Беларуси; № 40).
2. Кашпар А.И., Лаптинский В.Н. *Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 570–583.
3. Кашпар А.И., Лаптинский В.Н. *О разрешимости задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., 5 – 10 сентября 2016 г. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2016. Ч. 2. С. 32–33.
4. Кашпар А.И. *Разрешимость и построение решения задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // матер. XX Междунар. науч.-техн. конф, 31 мая – 03 июня 2022 г. Новополоцк. Полоцкий государственный университет. 2022. С. 59–59.
5. Кашпар А.И. *Регуляризация задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Теория управления и математическое моделирование: матер. Всероссийской конф. с междунар. участием, посв. памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова, 14 – 16 июня 2022 г. Ижевск. Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022. С. 64–67.
6. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
7. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.
8. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

В.Н. Лаптинский

Исследуется задача типа [1] отыскания $x \in \mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \tag{2}$$

где $A \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$, $\Psi_i \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i, b_i \in I = [0,\omega]$, $i = \overline{1,k}$, $\omega > 0$.

Система (2) представляет собой обобщение задачи [2], а при $k = \infty$ – задач [3, с. 264], [4, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i \in \mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, возможно, базисного типа [5, гл. 4], в частности, $\Phi_i(t) = \Psi_i(t)$.

В данной работе результаты [1] развиты применительно к (1), (2). Сначала определяется структура типа [1], [5, гл. 4] решения задачи. Пусть эта задача разрешима. Для