$$\mathbf{Y}_{k+1}(t)=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^{\omega}\left(\int\limits_{\tau}^{t}\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\left(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\right)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t).$$

Исследована сходимость, скорость сходимости данного алгоритма, а также получены соответствующие оценки типа [1, 2].

Литература

1. Лаптинский В. Н., Кашпар А. И. *Конструктивный анализ краевой задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2016. (Препринт / Ин-т технол. металлов Беларуси; № 40).
2. Кашпар А.И., Лаптинский В.Н. *Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 570–583.
3. Кашпар А.И., Лаптинский В.Н. *О разрешимости задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф., 5 – 10 сентября 2016 г. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2016. Ч. 2. С. 32–33.
4. Кашпар А.И. *Разрешимость и построение решения задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // матер. XX Междунар. науч.-техн. конф, 31 мая – 03 июня 2022 г. Новополоцк. Полоцкий государственный университет. 2022. С. 59–59.
5. Кашпар А.И. *Регуляризация задачи Валле–Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Теория управления и математическое моделирование: матер. Всероссийской конф. с междунар. участием, посв. памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е. Л. Тонкова, 14 – 16 июня 2022 г. Ижевск. Изд-во УИР ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2022. С. 64–67.
6. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
7. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.
8. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

В.Н. Лаптинский

Исследуется задача типа [1] отыскания $x\in\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t), \tag{1}$$

$$\int\limits_{a_i}^{b_i}\Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau=\mu_i, \tag{2}$$

где $A\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $f\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$, $\Psi_i\in\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $\mu_i\in\mathbb{R}^n$, $a_i,b_i\in I=[0,\omega]$, $i=\overline{1,k}$, $\omega>0$.

Система (2) представляет собой обобщение задачи [2], а при $k=\infty$ – задач [3, с. 264], [4, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i\in\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, возможно, базисного типа [5, гл. 4], в частности, $\Phi_i(t)=\Psi_i(t)$.

В данной работе результаты [1] развиты применительно к (1), (2). Сначала определяется структура типа [1], [5, гл. 4] решения задачи. Пусть эта задача разрешима. Для возможных решений класса $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^n)$ системы (2) при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение

$$x(t) = y(t) + \mathcal{L}_t(y) + g(t), \tag{3}$$

где $y(t)$ – вспомогательная функция, аналогичная [1], последовательно доопределяемая в рамках соответствующего алгоритма с сохранением произвола, $\mathcal{L}_t(y), g(t)$ – соответственно линейный однородный интегральный оператор и функция, получаемые по алгоритму

$$\mathcal{L}_{j+1}(y_{j+1}) = \mathcal{L}_j(y_{j+1}) - \mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})\left(\Psi_{j+1}\widetilde{\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right)^{-1}\int\limits_{a_{j+1}}^{b_{j+1}}\Psi_{j+1}\left(y_{j+1} + \mathcal{L}_j(y_{j+1})\right)d\tau, \tag{4}$$

$$g_{j+1} = g_j + \mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})\left(\Psi_{j+1}\widetilde{\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right)^{-1}\left[\mu_{j+1} - \int\limits_{a_{j+1}}^{b_{j+1}}\Psi_{j+1}g_j d\tau\right], \tag{5}$$

$j = \overline{0, k-1}$, тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку $[a_j, b_j]$, при этом $\mathcal{L}_0(y_1) = 0$, $\mathcal{L}_0(\Phi_1) = \Phi_1$, $g_0 = 0$, $\mathcal{L}_k(y_k) = \mathcal{L}(y)$, $y_k = y$, $a_0 = b_0 = 0$,

$$\det\left(\Psi_{j+1}\widetilde{\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right) \neq 0, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{6}$$

Выполнение условия (6) обеспечивает реализуемость процесса (4), (5) построения $\mathcal{L}_t(y), g(t)$, начиная с

$$\mathcal{L}_1(y_1) = -\Phi_1\left(\widetilde{\Psi_1\Phi_1}\right)^{-1}\int\limits_{a_1}^{b_1}\Psi_1 y_1 d\tau, \quad g_1 = \Phi_1\left(\widetilde{\Psi_1\Phi_1}\right)^{-1}\mu_1.$$

Соотношение (3) принимается за основу как представление типа [1, 2], [5, гл. 4] решения задачи (1), (2). Следуя методике, используемой в [1], сведём эту задачу к эквивалентному интегральному уравнению. Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\tilde{x}(t) = U(t)\left[x_0 + \int\limits_0^t U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\right], \tag{7}$$

где $U(t)$ ($U(0) = E$ – единичная матрица) – фундаментальная матрица, $x_0 = x(0)$.

Далее следует согласовать функции $x(t)$, $\tilde{x}(t)$. Из (3) имеем

$$x_0 = y_0 + \mathcal{L}_0(y) + g_0. \tag{8}$$

На основе (3), (7), (8) получим

$$x(t) = U(t)\left[y_0 + \mathcal{L}_0(y) + g_0\right] + U(t)\int\limits_0^t U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \tag{9}$$

Произвол функции $y(t)$ обеспечивает условие (8) согласования выражений (3), (7). Искомое интегральное уравнение имеет вид

$$y(t) = \mathcal{K}_t(y) + p(t), \tag{10}$$

где

$$\mathcal{K}_t(y) = U(t)\mathcal{L}_0(y) - \mathcal{L}_t(y), \quad p(t) = U(t)\left[y_0 + g_0 + \int\limits_0^t U^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau\right] - g(t).$$

Однозначная обратимость операций, используемых при получении (10), позволяет выполнить переход от (10) с учётом (3) к (1), (2). Тем самым, всякое непрерывное решение уравнения (10) является решением задачи (1), (2) в представлении (3). Это означает эквивалентность интегральной задачи (10) дифференциальной задаче (1) с интегральными условиями (2).

Для изучения разрешимости в пространстве $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$ уравнения (10) воспользуемся принципом сжимаемых отображений [3, с. 604]. Пусть $q = \|\mathcal{K}_t(y)\|_C$ – норма оператора $\mathcal{K}_t(y)$ в этом пространстве. На основании этого принципа при выполнении условия $q < 1$ уравнение (10) однозначно разрешимо, при этом справедлива оценка

$$\|y(t)\|_C \leqslant \frac{h}{1-q} \quad \left(h = \max_{t\in I}\|p(t)\|\right). \tag{11}$$

Вместо (11) можно получить грубую, но явную оценку, если $\mathcal{K}_t(y)$ представить в следующем виде:

$$\mathcal{K}_t(y) = U(t)\left[\mathcal{L}_0(y) - \mathcal{L}_t(y)\right] + \left[U(t) - E\right]\mathcal{L}_t(y).$$

Тогда

$$\|\mathcal{K}_t(y)\| \leqslant \|U(t)\|\,\|\mathcal{L}_0(y) - \mathcal{L}_t(y)\| + \|U(t) - E\|\,\|\mathcal{L}_t(y)\|. \tag{12}$$

Для слагаемых в правой части (12) могут быть получены явные оценки.

Лемма. *При выполнении условия $q < 1$ уравнение (10) однозначно разрешимо, при этом справедлива оценка (11).*

Теорема. *Пусть выполнено условие (6), а также $q < 1$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в представлении (3), при этом справедлива оценка $\|x\|_C \leqslant \dfrac{(1+a)h}{1-q} + \delta$, где $\delta = \max\limits_{t\in I}\|g(t)\|$, $a = \|\mathcal{L}_t(y)\|_C$.*

Литература

1. Лаптинский В.Н. *Об одной дифференциальной задаче с условиями интегрального типа* // XX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям «Еругинские чтения–2022»: мат-лы междунар. науч. конф. Новополоцк, 31 мая–03 июня 2022 г.: в 2 ч. Ч. 1. Новополоцк: Полоцкий гос. ун-т. 2022. С. 61–62.

2. Лаптинский В.Н. *К решению интегральных задач* // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилёв, 21–22 апреля 2022 г. Могилёв: Белорус.-Рос. ун-т. 2022. С. 401–402.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

4. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскнер А.Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

5. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.