К КОНСТРУКТИВНОМУ АНАЛИЗУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА

В.Н. Лаптинский

Изучается задача типа [1] построения $x \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$\int\limits_0^\omega A(\tau)x(\tau)d\tau = -\int\limits_0^\omega f(\tau)d\tau, \tag{2}$$

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \tag{3}$$

где $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $\Psi_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $a_i, b_i \in I = [0, \omega]$, $i = \overline{1, k}$; $\omega > 0$; (1), (2) представляют собой периодическую краевую задачу в постановке по методу регуляризации [2], [3, гл. 3]; (3) – обобщение интегральных условий [1], а при $k = \infty$ – условий типа [4, с. 264], [5, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, возможно, базисного типа, $\Phi_i(0) = \Phi_i(\omega)$. Допускается случай $f(t) = 0$.

Для отыскания решения задачи (1)–(3) сначала для возможных решений класса $\mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ системы (3) с помощью методики [6, 7] при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение типа [1]

$$x(t) = y(t) + \mathcal{L}_t(y) + g(t), \tag{4}$$

где $y(t)$ – вспомогательная функция, аналогичная [1], последовательно доопределяемая в рамках соответствующего алгоритма с сохранением произвола, $\mathcal{L}_t(y), g(t)$ – соответственно линейный однородный интегральный оператор и функция, конструируемые по алгоритму

$$\mathcal{L}_{j+1}(y_{j+1}) = \mathcal{L}_j(y_{j+1}) - \mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})\left(\widetilde{\Psi_{j+1}\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right)^{-1}\int\limits_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \Psi_{j+1}\left(y_{j+1} + \mathcal{L}_j(y_{j+1})\right)d\tau, \tag{5}$$

$$g_{j+1} = g_j + \mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})\left(\widetilde{\Psi_{j+1}\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right)^{-1}\left[\mu_{j+1} - \int\limits_{a_{j+1}}^{b_{j+1}} \Psi_{j+1}g_j d\tau\right], \tag{6}$$

$j = \overline{0, k-1}$, тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку $[a_j, b_j]$, при этом $\mathcal{L}_0(y_1) = 0$, $\mathcal{L}_0(\Phi_1) = \Phi_1$, $g_0 = 0$, $\mathcal{L}_k(y_k) = \mathcal{L}_t(y)$, $y_k = y$, $a_0 = b_0 = 0$,

$$\det\left(\widetilde{\Psi_{j+1}\mathcal{L}_j(\Phi_{j+1})}\right) \neq 0, \quad j = \overline{0, k-1}. \tag{7}$$

Условие (7) обеспечивает выполнимость структурных элементов алгоритма (5), (6).

Соотношение (4) принимается за основу как представление типа [1], [3, гл. 4] решения задачи (1)–(3). Следуя методике, используемой в [1], эта задача сводится к эквивалентному интегральному уравнению, исходя из (4) и интегрального уравнения [3, гл. 2],

$$x(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t,\tau)\left[A(\tau)x(\tau) + f(\tau)\right]d\tau - \tilde{A}^{-1}\int_0^\omega f(\tau)d\tau, \tag{8}$$

полученного при выполнении условия

$$\det \tilde{A} \neq 0, \tag{9}$$

где

$$\mathcal{K}(t,\tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}\int\limits_0^\tau A(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ -\tilde{A}^{-1}\int\limits_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant t < \tau \leqslant \omega. \end{cases}$$

Используя произвол функции $y(t)$, получим (4), (8)

$$y(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t,\tau)A(\tau)\left[y(\tau) + \mathcal{L}_\tau(y)\right]d\tau - \mathcal{L}_t(y) + p(t), \tag{10}$$

где

$$p(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t,\tau)\left[A(\tau)g(\tau) + f(\tau)\right]d\tau - g(t) - \tilde{A}^{-1}\int_0^\omega f(\tau)d\tau.$$

Однозначная обратимость операций, используемых при получении (10), позволяет выполнить корректный переход от (10) к (1)–(3) с учётом (4). Тем самым, всякое непрерывное решение уравнения (10) является решением задачи (1)–(3) в представлении (4).

Для анализа разрешимости уравнения (10) в пространстве $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^n)$ воспользуемся принципом сжимающих отображений [4, с. 604] на основе соответствующего (10) операторного уравнения

$$y = G_t(y) + p(t), \tag{11}$$

где $G_t(y)$ – интегральный оператор, определяемый правой частью (10).

Обозначения:

$$a = \|\mathcal{L}_t(y)\|_C, \qquad b = \|G_t(y)\|_C, \qquad h = \max_{t\in I}\|p(t)\|, \qquad \delta = \max_{t\in I}\|g(t)\|.$$

Лемма. *При выполнении условия $b<1$ решение уравнения (11) существует и единственно, при этом справедлива оценка*

$$\|y\|_C \leqslant \frac{h}{1-b}.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия (7), (9), а также $b<1$. Тогда задача (1)–(3) однозначно разрешима в представлении (4), при этом справедлива оценка $\|x\|_C \leqslant \dfrac{(1+a)h}{1-b} + \delta$.*

Для построения решения $x(t)$ может быть использован классический метод последовательных приближений [4, с. 605].

Литература

1. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ линейной интегро-дифференциальной задачи периодического типа* // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конф. с междунар. участием, Ижевск, Россия, 13–17 июня 2022 г. Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет». 2022. С. 75–78.

2. Лаптинский В.Н. *К методам регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений* // Междунар. математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: тез. докл. междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси. 2021. С. 98–100.

3. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

5. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскнер А.Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

6. Лаптинский В.Н. *К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств* // IX Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф. Гродно: ГрГУ, 2004. Ч. 1. С. 81–82.

7. Лаптинский В.Н. *Об одной задаче теории векторных пространств* // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т матем. Минск, 2008. Ч. 3. С. 65–66.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

Исследуется краевая задача типа [1,2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + G(t,X) + \lambda F(t,X), \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $(t,X) \in I\times\mathbb{R}^{n\times n}$, $G(t,X) = Q_1(t)X^2 + XQ_2(t)X + X^2Q_3(t)$, $A, B, Q_i \in \mathbb{C}\ (I,\mathbb{R}^{n\times n})(i = 1,2,3), F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально): $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В случае $Q_i = 0$, $\lambda = 1$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4, 5 и др.]. С помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I \times \mathbb{R}^{n\times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением, обобщением и развитием [1, 2, 7]. Задача (1), (2) рассматривается в банаховой алгебре непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например любая из норм, приведенных в [8, с.21],

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : 0 \le t \le \omega, \|X\| \le \rho\}, M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau, N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \alpha = \max_t\|A(t)\|, \beta = \max_t\|B(t)\|, \delta_i = \max_t\|Q_i(t)\|(i = 1,2,3),$$

$$h = \max_t\|F(t,0)\|, \varepsilon = |\lambda|,\ q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho) + q_2(\rho)\varepsilon, \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho)\varepsilon,$$