Литература

1. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ линейной интегро-дифференциальной задачи периодического типа* // Теория управления и математическое моделирование: материалы Всероссийской конф. с междунар. участием, Ижевск, Россия, 13–17 июня 2022 г. Ижевск: Изд. центр «Удмуртский университет». 2022. С. 75–78.

2. Лаптинский В.Н. *К методам регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений* // Междунар. математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: тез. докл. междунар. науч. конф. Минск, 1–4 июня 2021 г. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси. 2021. С. 98–100.

3. Лаптинский В.Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.

5. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскнер А.Г. *Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.* М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

6. Лаптинский В.Н. *К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств* // IX Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф. Гродно: ГрГУ, 2004. Ч. 1. С. 81–82.

7. Лаптинский В.Н. *Об одной задаче теории векторных пространств* // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3 – 7 ноября 2008 г. / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т матем. Минск, 2008. Ч. 3. С. 65–66.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

Исследуется краевая задача типа [1,2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + G(t,X) + \lambda F(t,X), \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $(t,X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $G(t,X) = Q_1(t)X^2 + XQ_2(t)X + X^2Q_3(t)$, $A, B, Q_i \in \mathbb{C}\ (I, \mathbb{R}^{n\times n})(i = 1,2,3), F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально): $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В случае $Q_i = 0$, $\lambda = 1$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4, 5 и др.]. С помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I \times \mathbb{R}^{n\times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением, обобщением и развитием [1, 2, 7]. Задача (1), (2) рассматривается в банаховой алгебре непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max_{t\in I}\|X(t)\|$, где $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ – определенная норма матриц в этой алгебре, например любая из норм, приведенных в [8, с.21],

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : 0 \le t \le \omega, \|X\| \le \rho\}, M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau, N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \alpha = \max_t \|A(t)\|, \beta = \max_t \|B(t)\|, \delta_i = \max_t \|Q_i(t)\|(i = 1,2,3),$$

$$h = \max_t \|F(t,0)\|, \varepsilon = |\lambda|,\ q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho) + q_2(\rho)\varepsilon, \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho)\varepsilon,$$

$$q_1(\rho) = 3\gamma\delta\omega[(\alpha+\beta)\omega + 2]\rho + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2, q_2(\rho) = \gamma\omega L[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega],$$

$$\varphi_1(\rho) = 3\gamma\delta\omega[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega]\rho^2 + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho, \varphi_2(\rho) = [1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega](L+h)\gamma\omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_1(\rho)}{\varphi_2(\rho)}, \varepsilon_2 = \frac{1 - q_1(\rho)}{q_2(\rho)}, \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\},$$

где $\delta = \max \delta_i (i = 1, 2, 3)$, $0 < \rho < \tilde{\rho}, t \in I, L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t, X)$ в области D_ρ, Φ – линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_1(\rho) < \rho$, $q_1(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \varphi(\rho, \varepsilon)$.*

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой

$$X_{k+1}(t,\lambda) = \Phi^{-1}\Big\{ \int_0^\omega A(\tau)d\tau \int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) + G(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda)) +$$

$$+\lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma + \int_0^\omega \Big(\int_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) +$$

$$+G(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda)) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma\Big) B(\tau)d\tau -$$

$$- \int_0^\omega [G(\tau, X_k(\tau,\lambda)) + \lambda F(\tau, X_k(\tau,\lambda))]d\tau \Big\}, \ k = 1, 2, \ldots, \quad (3)$$

где $X_0 = 0$, $X_1 = -\lambda\Phi^{-1} \int_0^\omega F(\tau, 0)d\tau$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X - X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \le \frac{q\|X_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}} + q_2\|X_k - X_{k-1}\|_{\mathbb{C}}}{1-q}, \ k = 1, 2, \ldots \quad (4)$$

Оценка (4) дополнена следующими оценками:

$$\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} \le \varepsilon\gamma\omega h;$$

$$\|X_2 - X_1\|_{\mathbb{C}} \le \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2[(\alpha+\beta)\rho + \varepsilon h] + \gamma\omega(3\delta\rho^2 + \varepsilon L\rho),$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрена модельная задача при $n = 2$.

Замечание. В [7] приведен алгоритм с неявной вычислительной схемой. Он неудобен для реализации тем, что при построении приближений на каждом шаге итерации следует решать соответствующее интегральное уравнение.

Литература

1. Маковецкая. О. А. // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2014. № 1. С.43-50.
2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. // Дифференц. уравнения, 2018. Т. 54. №7. С. 937-946.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.
5. Лаптинский В. Н. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. №4. С.14–18.
6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.// Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505-515.
7. Маковецкая О. А. // Материалы междунар. науч. конф. “Еругинские чтения - 2019”. Минск, 2019. Т.1. С. 83-84.
8. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М. : Наука, 1967.

К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И.И. Маковецкий

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})(i = 1, 2)$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, M, N – постоянные $n \times n$-матрицы, функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t, 0) \not\equiv 0$.

С помощью качественных методов задача (1), (2) рассматривалась в [1]. На основе конструктивного метода [2, гл.3] эта задача изучалась в работах [3; 4, гл. 1-3] в банаховой алгебре непрерывных матриц-функций $X(t)$ с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре.

Обозначения:

$$\tilde H(\omega) = \int_0^\omega H(\tau)d\tau, H \in \{A, B\}, D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \le \rho < \tilde\rho\},$$

$$R = M^{-1}(M\tilde A(\omega) - M - N), S = -\tilde B(\omega), \Psi(t)X = A(t)X + XB(t),$$

$$\Phi X = RX - XS, m = \|M^{-1}(M + N)\|, \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|, \beta = \max_{t\in I}\|B(t)\|,$$

$$h = \max_{t\in I}\|F(t, 0)\|, q = \gamma\omega\Big[(\alpha + \beta + L)\Big(m + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega\Big) + L\Big],$$

$$\tilde q = \gamma(\alpha + \beta)\omega[m + 2^{-1}(\alpha + \beta)\omega],$$

$$p = \gamma\omega h\Big(m + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega + 1\Big), q_1 = (q - \tilde q)/(1 - \tilde q) < q,$$