Литература

1. Маковецкая. О. А. // Весцi нацыянальнай акадэмii навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2014. № 1. С.43-50.
2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. // Дифференц. уравнения, 2018. Т. 54. №7. С. 937-946.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.
5. Лаптинский В. Н. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. №4. С.14–18.
6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.// Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505-515.
7. Маковецкая О. А. // Материалы междунар. науч. конф. “Еругинские чтения - 2019”. Минск, 2019. Т.1. С. 83-84.
8. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М. : Наука, 1967.

К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

И.И. Маковецкий

Рассматривается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})(i = 1, 2)$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < < \tilde\rho\}$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \le \infty$, M, N – постоянные $n \times n$-матрицы, функция $F(t, X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t, 0) \not\equiv 0$.

С помощью качественных методов задача (1), (2) рассматривалась в [1]. На основе конструктивного метода [2, гл.3] эта задача изучалась в работах [3; 4, гл. 1-3] в банаховой алгебре непрерывных матриц-функций $X(t)$ с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max\limits_{t\in I} \|X(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в этой алгебре.

Обозначения:

$$\tilde H(\omega) = \int_0^\omega H(\tau)d\tau, H \in \{A, B\}, D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \le \rho < \tilde\rho\},$$

$$R = M^{-1}(M\tilde A(\omega) - M - N), S = -\tilde B(\omega), \Psi(t)X = A(t)X + XB(t),$$

$$\Phi X = RX - XS, m = \|M^{-1}(M + N)\|, \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \alpha = \max_{t\in I} \|A(t)\|, \beta = \max_{t\in I} \|B(t)\|,$$

$$h = \max_{t\in I} \|F(t, 0)\|, q = \gamma\omega\Big[(\alpha + \beta + L)\Big(m + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega\Big) + L\Big],$$

$$\tilde q = \gamma(\alpha + \beta)\omega[m + 2^{-1}(\alpha + \beta)\omega],$$

$$p = \gamma\omega h\Big(m + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\omega + 1\Big), q_1 = (q - \tilde q)/(1 - \tilde q) < q,$$

где $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, оператор Φ и при каждом $t \in I$ оператор $\Psi(t)$ – линейные операторы $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:* $\det M \neq 0$, *матрицы* R, S *не имеют общих характеристических чисел,* $q < 1$, $p/(1-q) \leq \rho$. *Тогда в области* D_ρ *решение* $X = X(t)$ *задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся по* $t \in I$ *последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением, при этом справедлива оценка* $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq p/(1-q)$.

Рекуррентное интегральное соотношение представляет собой итерационный алгоритм

$$X_k(t) = \Phi^{-1}\mathcal{L}(X_k(t), X_{k-1}(t)), k \in \mathbb{N},$$

где в качестве начального значения функции X_0 может быть взята любая функция из пространства $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$ такая, что $\|X_0\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$, $\mathcal{L}$ – линейный оператор $\mathcal{L} : \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n}) \to \mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, заданный равенством

$$L(X(t),Y(t)) = M^{-1}(M+N)\int_t^\omega (\Psi(\tau)X(\tau) + F(\tau,Y(\tau)))d\tau +$$

$$+\int_0^\omega [K_A(t,\tau)(\Psi(\tau)X(\tau) + F(\tau,Y(\tau)))+$$

$$+(\Psi(\tau)X(\tau) + F(\tau,Y(\tau)))K_B(t,\tau)]d\tau - \int_0^\omega F(\tau,Y(\tau))d\tau, \qquad (3)$$

где

$$K_H(t,\tau) = \begin{cases} \int_0^\tau H(\sigma)d\sigma, 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\int_\tau^\omega H(\sigma)d\sigma, 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Справедливы оценки

$$\|X - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q_1^m\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q_1},\ \|X_{\mathbb{C}}\| \leq \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q_1},$$

где при $X_0 = 0$

$$\|X_1\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{p}{1-\tilde{q}}.$$

Таким образом, оценки, характеризующие скорость сходимости алгоритма и область локализации решения, имеют вид

$$\|X - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q_1^m p}{1-q}, \|X\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{p}{1-q}.$$

Замечание. В работе [5] рассмотрен случай $\det N \neq 0$. Как и в [5], вычислительная схема алгоритма (3) является неявной, при этом приближенные решения, полученные по этому алгоритму, удовлетворяют краевому условию (2).

Литература

1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.// Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505-515.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

3. Маковецкий И. И. // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии. Материалы Международной научно-технической конференции. Могилев. 2020. С. 497-498.

4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев, 2012.

5. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И. // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 137-141.

ОБОБЩЕННЫЙ ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ И ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

В.И. Мироненко, В.В. Мироненко

Определение 1. Обобщенным первым интегралом дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in R, \quad x^T = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n, \tag{1}$$

мы называем дифференцируемую не вырождающуюся в постоянную по x функцию $U(t,x)$, которая на каждом решении $x(t)$, $t \in (-\alpha;\alpha)$, системы (1) обращается в четную функцию $U(t,x(t)) = \varphi_{ev}(t)$.

Естественно, что любой обыкновенный первый интеграл является обобщенным первым интегралом.

Определение 2. Отражающей функцией системы (1) названа [1] дифференцируемая функция $F(t,x)$, которая на каждом решении $x(t)$, $t \in (-\alpha;\alpha)$, удовлетворяет соотношению $F(t,x(t)) \equiv x(-t)$.

Откуда следует, что дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} f(t,x) + f(-t,F) = 0, \quad F(0,x) \equiv x.$$

Приложения отражающей функции можно посмотреть в [2-5] и других работах этих авторов. Эти приложения основаны на том, что если $F(t,x)$ — отражающая функция 2ω-периодической системы, то $F(-\omega,x)$ является отображением Пуанкаре этой системы на периоде $[-\omega,\omega]$.

Теорема 1. *Пусть* $F(t,x) = (F_1(t,x), ..., F_n(t,x))^T$ *— отражающая функция дифференциальной системы (1). Тогда функции* $U_i(t,x) := x_i + F_i(t,x)$, $i = \overline{1;n}$, *являются обобщенными первыми интегралами этой системы. Эти интегралы образуют базис во множестве обобщенных первых интегралов в том смысле, что каждый обобщенный первый интеграл* $V(t,x)$ *можно записать в виде* $V(t,x) = \Phi(t, U_1(t,x), ..., U_n(t,x))$, *где* Φ *четна по первому аргументу.*

Теорема 2. *Пусть для дифференциального уравнения*

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{P(\varphi,\rho)}{1 + 2m\rho + a\cos\rho + 2am(\sin\rho + \rho\cos\rho) + ma^2\sin 2\rho}$$

выполнены условия: