Литература

1. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.// Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505-515.

2. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

3. Маковецкий И. И. // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии. Материалы Международной научно-технической конференции. Могилев. 2020. С. 497-498.

4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати. Могилев, 2012.

5. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И. // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 137-141.

ОБОБЩЕННЫЙ ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ И ОТРАЖАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

В.И. Мироненко, В.В. Мироненко

Определение 1. Обобщенным первым интегралом дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in R, \quad x^T = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n, \tag{1}$$

мы называем дифференцируемую не вырождающуюся в постоянную по x функцию $U(t,x)$, которая на каждом решении $x(t)$, $t \in (-\alpha;\alpha)$, системы (1) обращается в четную функцию $U(t,x(t)) = \varphi_{ev}(t)$.

Естественно, что любой обыкновенный первый интеграл является обобщенным первым интегралом.

Определение 2. Отражающей функцией системы (1) названа [1] дифференцируемая функция $F(t,x)$, которая на каждом решении $x(t)$, $t \in (-\alpha;\alpha)$, удовлетворяет соотношению $F(t,x(t)) \equiv x(-t)$.

Откуда следует, что дифференцируемая функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} f(t,x) + f(-t,F) = 0, \quad F(0,x) \equiv x.$$

Приложения отражающей функции можно посмотреть в [2-5] и других работах этих авторов. Эти приложения основаны на том, что если $F(t,x)$ — отражающая функция 2ω-периодической системы, то $F(-\omega,x)$ является отображением Пуанкаре этой системы на периоде $[-\omega,\omega]$.

Теорема 1. *Пусть* $F(t,x) = (F_1(t,x), ..., F_n(t,x))^T$ *— отражающая функция дифференциальной системы (1). Тогда функции* $U_i(t,x) := x_i + F_i(t,x)$, $i = \overline{1;n}$, *являются обобщенными первыми интегралами этой системы. Эти интегралы образуют базис во множестве обобщенных первых интегралов в том смысле, что каждый обобщенный первый интеграл* $V(t,x)$ *можно записать в виде* $V(t,x) = \Phi(t, U_1(t,x), ..., U_n(t,x))$, *где* Φ *четна по первому аргументу.*

Теорема 2. *Пусть для дифференциального уравнения*

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{P(\varphi,\rho)}{1 + 2m\rho + a\cos\rho + 2am(\sin\rho + \rho\cos\rho) + ma^2 \sin 2\rho}$$

выполнены условия:

1) *функция* $a = a(\varphi)$ *имеет производную* $a'(\varphi)$ *и* 2π *-периодична;*
2) *для функций* $P(\varphi,\rho)$ *верно тождество* $P(\varphi,0) \equiv 0$ *и справедливо соотношение* $P(\varphi,\rho) + (1+2mU)a'(\varphi)\sin\rho = \Phi(\varphi,U)$, *где* $U = \rho + a(\varphi)\sin\rho$, *а функция* $\Phi(\varphi,U)$*– нечетна по первому аргументу.*

Тогда функция $U(\varphi,\rho) = \rho + a(\varphi)\sin\rho$ *представляет собой обобщенный первый интеграл рассматриваемого уравнения, а особая точка* $\rho = 0$ *для этого уравнения является центром при условии, что* $|a(\varphi)| < 1$ *для всех* φ.

Литература

1. Мироненко В. И. *Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем.* // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. XVII. № 9. С. 1603–1610.
2. Мироненко В. И. *Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений.* Минск: Университетское, 1986.
3. Zhou Zhengxin. *The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications* Beijing: 2014.
2. Мироненко В. И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем.* Гомель, 2004.
5. Мусафиров Э. И. *Временные симметрии дифференциальных систем.* Пинск, 1966.

О ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ТРЕХМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Э.В. Мусафиров

Так как многие качественные свойства решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих одну и ту же отражающую функцию Мироненко [1], являются общими, то целесообразно для хорошо изученных систем искать возмущения, не изменяющие отражающую функцию Мироненко (так называемые *допустимые возмущения*). Если удастся найти допустимые возмущения, то мы тем самым узнаем, какие возмущения не меняют качественных свойств решений (устойчивость по Ляпунову, по Липшицу, глобальную экспоненциальную устойчивость, наличие периодических решений и их асимптотическую устойчивость (неустойчивость), наличие хаотических аттракторов), присущих решениям исходной невозмущенной системы.

Для поиска допустимых возмущений можно воспользоваться теоремой 1 из [2], которую сформулируем здесь в следующем виде:

Теорема 1. *Если вектор–функции* $\Delta_i(t,x)$ $(i = \overline{1,m}$*, где* $m \in \mathbb{N}$ *или* $m = \infty)$ *удовлетворяют тождеству*

$$\frac{\partial\Delta_i(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_i(t,x)}{\partial x}X(t,x) - \frac{\partial X(t,x)}{\partial x}\Delta_i(t,x) \equiv 0, \tag{1}$$

то одинаковые отражающие функции Мироненко имеют системы $\dot{x} = X(t,x)$ *и* $\dot{x} = X(t,x) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)\Delta_i(t,x)$, *где* $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha_i(t)$ *— произвольные непрерывные скалярные нечетные функции.*

В качестве исходных систем рассматриваются известные автономные полиномиальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т.е. системы у которых правая часть $X(t,x) \equiv X(x)$ и компоненты вектора $X(x)$ — полиномы). Поиск допустимых возмущений осуществляется методом неопределенных коэффициентов, используя тождество (1) для вектор–функций $\Delta_i(t,x) \equiv \Delta_i(x)$ компоненты которых — полиномы. В этом случае тождество (1) имеет вид $\frac{\partial\Delta_i(x)}{\partial x}X(x) \equiv \frac{\partial X(x)}{\partial x}\Delta_i(x)$.