

- 1) функция $a = a(\varphi)$ имеет производную $a'(\varphi)$ и 2π -периодична;
- 2) для функций $P(\varphi, \rho)$ верно тождество $P(\varphi, 0) \equiv 0$ и справедливо соотношение $P(\varphi, \rho) + (1 + 2mU)a'(\varphi)\sin\rho = \Phi(\varphi, U)$, где $U = \rho + a(\varphi)\sin\rho$, а функция $\Phi(\varphi, U)$ — нечетна по первому аргументу.

Тогда функция $U(\varphi, \rho) = \rho + a(\varphi)\sin\rho$ представляет собой обобщенный первый интеграл рассматриваемого уравнения, а особая точка $\rho = 0$ для этого уравнения является центром при условии, что $|a(\varphi)| < 1$ для всех φ .

Литература

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и классификация периодических дифференциальных систем. // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. XVII. № 9. С. 1603–1610.
2. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск: Университетское, 1986.
3. Zhou Zhengxin. *The Theory of Reflecting Function of Differential Equations and Applications* Beijing: 2014.
2. Мироненко В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. Гомель, 2004.
5. Мусафиров Э. И. *Временные симметрии дифференциальных систем*. Пинск, 1966.

О ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ТРЕХМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Э. В. Мусафиров

Так как многие качественные свойства решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих одну и ту же отражающую функцию Мироненко [1], являются общими, то целесообразно для хорошо изученных систем искать возмущения, не изменяющие отражающую функцию Мироненко (так называемые *допустимые возмущения*). Если удастся найти допустимые возмущения, то мы тем самым узнаем, какие возмущения не меняют качественных свойств решений (устойчивость по Ляпунову, по Липшицу, глобальную экспоненциальную устойчивость, наличие периодических решений и их асимптотическую устойчивость (неустойчивость), наличие хаотических аттракторов), присущих решениям исходной невозмущенной системы.

Для поиска допустимых возмущений можно воспользоваться теоремой 1 из [2], которую сформулируем здесь в следующем виде:

Теорема 1. Если вектор-функции $\Delta_i(t, x)$ ($i = \overline{1, m}$, где $m \in \mathbb{N}$ или $m = \infty$) удовлетворяют тождеству

$$\frac{\partial \Delta_i(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta_i(t, x)}{\partial x} X(t, x) - \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \Delta_i(t, x) \equiv 0, \quad (1)$$

то одинаковые отражающие функции Мироненко имеют системы $\dot{x} = X(t, x)$ и $\dot{x} = X(t, x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \Delta_i(t, x)$, где $t \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha_i(t)$ — произвольные непрерывные скалярные нечетные функции.

В качестве исходных систем рассматриваются известные автономные полиномиальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (т.е. системы у которых правая часть $X(t, x) \equiv X(x)$ и компоненты вектора $X(x)$ — полиномы). Поиск допустимых возмущений осуществляется методом неопределенных коэффициентов, используя тождество (1) для вектор-функций $\Delta_i(t, x) \equiv \Delta_i(x)$ компоненты которых — полиномы. В этом случае тождество (1) имеет вид $\frac{\partial \Delta_i(x)}{\partial x} X(x) \equiv \frac{\partial X(x)}{\partial x} \Delta_i(x)$.

Используя Теорему 1 и указанный выше подход получены допустимые возмущения для автономных 3-мерных полиномиальных систем таких как система Лоренц-84 [3], система Лэнгфорда [4, 5], обобщённая система Лэнгфорда [6], обобщенная система Носе – Гувера [7] и другие. В [8] получены допустимые возмущения модели нейрона Хиндмарш – Роуз:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 - z + I, \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y, \\ \dot{z} &= r(s(x - \alpha) - z); \quad x, y, z, a, b, c, d, I, r, s, \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{2}$$

В частности, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Отражающие функции Мироненко системы (2) и системы*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ((b - ax)x^2 + y - z + I)(1 + \alpha_1(t)), \\ \dot{y} &= (c - y)(1 + \alpha_1(t) - \alpha_2(t)), \\ \dot{z} &= (s(x - \alpha) - z)(1 + \alpha_1(t)) + (y - c)\alpha_2(t)\end{aligned}\tag{3}$$

совпадают, если $d = 0$, $r = 1$ и $\alpha_i(t)$ — произвольные скалярные нечетные функции ($i = \overline{1, 2}$).

Рис. 1 иллюстрирует одинаковое поведение решений систем (2) и (3) при $a = 1/2$, $b = 2$, $c = I = r = \alpha = 1$, $s = 5$, $d = 0$, $\alpha_i(t) = \sin(it)$, $i = \overline{1, 2}$ и начальных условиях $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

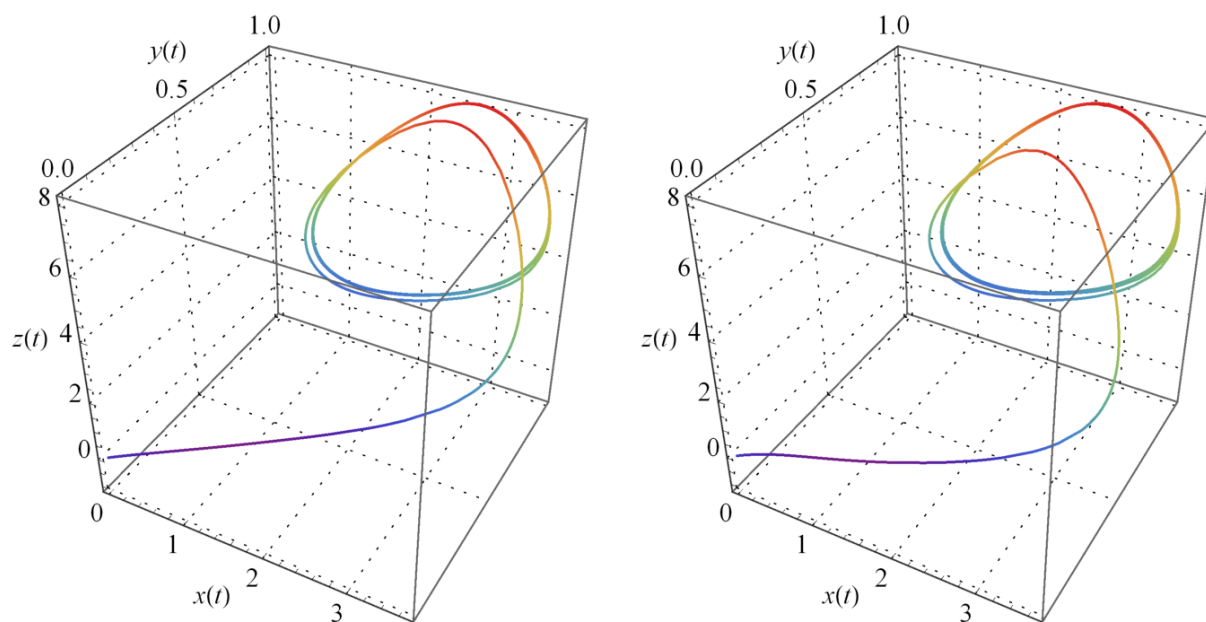


Рис. 1. Решение систем (2) и (3) (слева и справа соответственно) в фазовом пространстве

Литература

1. Мироненко В.И. *Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем*. Гомель: ГГУ, 2004.
2. Mironenko V.I., Mironenko V.V. *How to construct equivalent differential systems* // Applied Mathematics Letters. 2009. Vol. 22. № 9. P. 1356–1359.
3. Musafirov E. V. *Admissible perturbations of the Lorenz-84 climate model* // International journal of bifurcation and chaos. 2019. Vol. 29. № 6. 1950080.
4. Мусафиров Э.В. *Допустимые возмущения системы Лэнгфорда* // Проблемы физики, математики и техники. 2016. № 3 (28). С. 47–51.

5. Musafirov E. V. *Perturbations of the Lanford system which do not change the reflecting function* // International journal of bifurcation and chaos. 2017. Vol. 27. № 10. 1750154.
6. Musafirov E., Grin A., Pranevich A. *Admissible perturbations of a generalized Langford system* // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2022. Vol. 32. № 03. 2250038.
7. Мусафиров Э. В. *Допустимые возмущения обобщенной системы Носе – Гувера в одном случае* // Ползуновский альманах. 2020. № 1. С. 221–222.
8. Musafirov E. *Admissible perturbations of the three-dimensional Hindmarsh – Rose neuron model* // Journal of Applied Analysis & Computation. doi: 10.11948/20210098 (в печати).

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЁННОЙ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Д. В. Роголев

Изучается краевая задача, аналогичная [1],

$$\frac{dX}{dt} = G_1(t, X, Y), \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = G_2(t, X, Y), \quad (2)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \quad (3)$$

где

$$G_1(t, X, Y) = A_1(t)X + XB_1(t) + XS_1(t)X + XS_2(t)Y + YS_3(t)X + YS_4(t)Y + F_1(t),$$

$$G_2(t, X, Y) = A_2(t)Y + YB_2(t) + YP_1(t)X + YP_2(t)Y + XP_3(t)Y + XP_4(t)X + F_2(t),$$

с коэффициентами из $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $(t, X, Y) \in I \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n}$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$.

В теории и приложениях дифференциальных уравнений важную роль играют матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати и их обобщения [2–6]. Краевая задача типа (1)–(3), по-видимому, впервые поставлена в [5].

Обозначения:

$$\begin{aligned} D &= \{(t, X, Y) : t \in I, \|X\| \leq \rho_1, \|Y\| \leq \rho_2\}, \quad \tilde{A}_i(\omega) = \int_0^\omega A_i(\tau) d\tau, \quad \gamma_i = \|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\|, \\ \alpha_i &= \max_{t \in I} \|A_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_{t \in I} \|B_i(t)\|, \quad \delta_j = \max_{t \in I} \|S_j(t)\|, \quad \mu_j = \max_{t \in I} \|P_j(t)\|, \\ h_i &= \max_{t \in I} \|F_i(t)\|, \quad i = 1, 2, \quad j = \overline{1, 4}, \quad q_{11} = \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 [\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + (\delta_2 + \delta_3) \rho_2] + \right. \\ &\quad \left. + \omega [\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + (\delta_2 + \delta_3) \rho_2] \right\}, \quad q_{12} = \gamma_1 [(\delta_2 + \delta_3) \rho_1 + 2\delta_4 \rho_2] \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right), \\ q_{21} &= \gamma_2 [(\mu_1 + \mu_3) \rho_2 + 2\mu_4 \rho_1] \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega + 1 \right), \\ q_{22} &= \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 [\alpha_2 + \beta_2 + (\mu_1 + \mu_3) \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2] + \omega [\beta_2 + (\mu_1 + \mu_3) \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2] \right\}, \end{aligned}$$